

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. К. Манжосов, О. Д. Новикова

КОСОЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ

Практикум

Ульяновск,
УлГТУ
2018

УДК 539.9(076)
ББК 30.121я7
М23

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доцент Н. И. Куканов

*Рекомендовано научно-методической комиссией строительного факультета
в качестве практикума*

Манжосов, Владимир Кузьмич
М23 Косой изгиб стержня : практикум / В. К. Манжосов, О. Д. Новикова. – Ульяновск : УлГТУ, 2018. – 47 с.

Составлен в соответствии с учебными программами по дисциплинам «Сопротивление материалов» для направлений «Строительство», «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств». Практикум предназначен для самостоятельной работы, выполнения расчетно-проектировочных и контрольных заданий, предусмотренных рабочими программами по дисциплине.

Работа подготовлена на кафедре «Промышленное и гражданское строительство».

УДК 539.9(076)
ББК 30.121я7

© Манжосов В. К., Новикова О. Д., 2018
© Оформление. УлГТУ, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ. КОСОЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ	5
1.1. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня при косом изгибе	5
1.2. Напряжения в точках поперечного сечения при косом изгибе.....	10
1.2.1. Расчетные зависимости.....	10
1.2.2. Нулевая линия в поперечном сечении при косом изгибе.....	12
1.2.3. Опасные точки в поперечном сечении при косом изгибе.....	13
1.2.4. Силовая линия в поперечном сечении стержня.....	16
1.3. Расчет на прочность при косом изгибе.	17
1.4. Определение перемещений при косом изгибе.....	20
2. ПРИМЕР. РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ	24
3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ по теме «Расчет стержня при косом изгибе».....	34
4. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ по теме «Расчет стержня при косом изгибе».....	35
5. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ по теме «Расчет стержня при косом изгибе».....	38
5.1. Техническое задание.....	38
5.2. Схемы расчетных заданий на тему «Расчет стержня при косом изгибе».....	39
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	41
ГЛОССАРИЙ	43
РЕКОМЕНДУЕМЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	47

ВВЕДЕНИЕ

«Сопротивление материалов» является учебной дисциплиной, в которой излагаются теоретические основы и методы расчета стержневых систем на прочность, жесткость и устойчивость.

Вначале рассматриваются простые виды нагружения – центральное растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, прямой поперечный изгиб.

Под сложным нагружением стержня будем понимать различные комбинации простых видов нагружения (растяжения – сжатия, сдвига, кручения, поперечного изгиба). В общем случае сложного нагружения в поперечных сечениях стержня действуют шесть составляющих внутренних сил: продольная сила N , поперечные силы Q_y и Q_z , крутящий момент M_x , изгибающие моменты M_y и M_z .

Принципиально нового задачи сложного нагружения стержня не вносят, так как на основе принципа независимости действия сил любое сложное нагружение можно представить в виде совокупности более простых нагружений. Производя расчет стержня при простых нагружениях и суммируя результаты расчета, можно определить нормальные и касательные напряжения в различных точках поперечного сечения, найти опасные точки, определить главные напряжения в этих точках. Затем, используя ту или иную теорию прочности, можно перейти к анализу условия прочности.

Аналогично могут быть определены деформации и перемещения тех или иных сечений стержня путем суммирования деформаций и перемещений, вычисленных для отдельных, более простых нагружений. Заметим, что принцип независимости действия сил применим во всех случаях, когда деформации малы и подчиняются закону Гука.

Одним из видов сложного нагружения является косой изгиб.

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента в данном поперечном сечении стержня не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции этого сечения.

Встречается и другая трактовка понятия косого изгиба. Ее можно сформулировать следующим образом. *Если внешние силы, вызывающие изгиб стержня, действуют в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей стержня, то такой вид изгиба называется косым.* Такая трактовка удобна тем, что она позволяет говорить о виде изгиба (прямой или косой) еще на стадии рассмотрения расчетной схемы без определения изгибающего момента в расчетных сечениях и ориентации плоскости действия этого изгибающего момента.

Ниже рассмотрены основные положения расчета стержня при косом изгибе.

1. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ. КОСОЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ

1.1. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня при косом изгибе

Пусть на стержень действуют внешние силы, линии действия которых пересекают продольную ось стержня (рис. 1.1, а). Пусть оси y и z в поперечных сечениях стержня являются главными осями инерции сечения, а множество этих осей образуют главные плоскости стержня. Назовем **силовой плоскостью** плоскость, проходящую через продольную ось и линию действия силы.

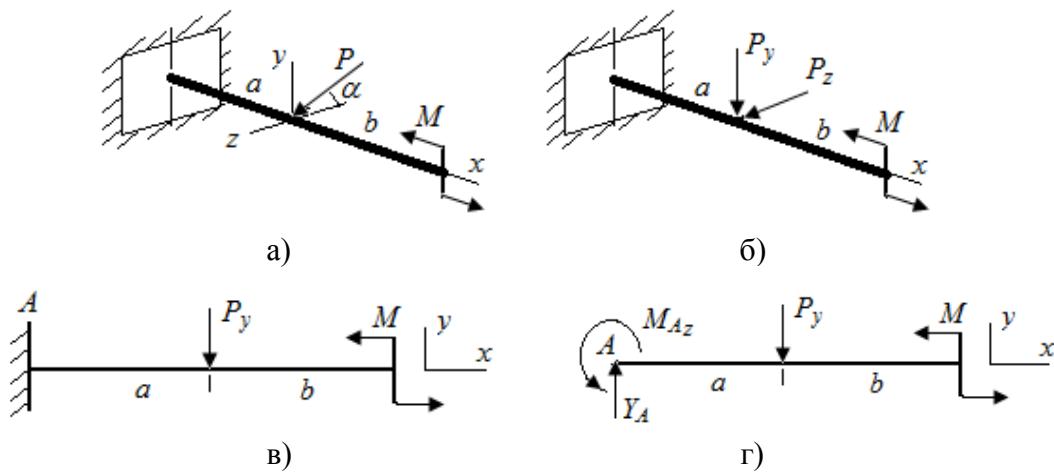


Рис. 1.1. Схемы нагружения стержня: а) схема нагружения, когда силовая плоскость не совпадает с главными плоскостями стержня; б) схема нагружения, когда сила P разложена на составляющие, лежащие в главных плоскостях; в) схема нагружения стержня в плоскости y - x ; г) схема нагружения стержня в плоскости y - x при замене внешней связи неизвестными опорными реакциями Y_A и M_{Az}

Если силовые плоскости тех или иных внешних сил не совпадают с главными плоскостями стержня (рис. 1.1, а), целесообразно эти силы разложить на составляющие, линии действия которых будут лежать в главных плоскостях (рис. 1.1, б).

Далее рассматриваем нагружение стержня отдельно сначала в одной плоскости нагружения (например, в плоскости y – x , рис. 1.1, в), совпадающей с главной плоскостью стержня. Ось z перпендикулярна плоскости нагружения и направлена к наблюдателю. Последовательность расчета соответствует той, что имеет место при поперечном изгибе:

1) отбрасываются внешние связи и их действие заменяется неизвестными реакциями связей Y_A и M_{Az} (рис. 1.1, г);

2) составляются уравнения равновесия, из которых могут быть определены неизвестные реакции связей;

3) составляются уравнения для определения внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня на различных его участках.

Внутренними силовыми факторами в поперечных сечениях при нагружении стержня, испытывающего изгиб, в плоскости $y - x$ является поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z . Поперечная сила Q_y в произвольном поперечном сечении определяется как

$$Q_y = \begin{cases} (\sum P_{iy})_f, \\ -(\sum P_{iy})_p, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $(\sum P_{iy})_f$ – сумма проекций на ось y внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня от его начала до рассматриваемого сечения; $(\sum P_{iy})_p$ – сумма проекций на ось y внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения до конца стержня.

В системе уравнений (1.1) может быть использовано либо первое, либо второе уравнение. Выбор того или иного уравнения определяется стремлением сделать его более простым, содержащим как можно меньше слагаемых. А так как число слагаемых определяется числом проекций сил, рекомендуется использовать то уравнение, где число проекций сил будет меньше.

Уравнения вида (1.1) составляются для каждого участка стержня

$$(Q_y)_j = \begin{cases} (\sum P_{iy})_f, \\ -(\sum P_{iy})_p, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2)$$

где j – текущий номер участка; n – число участков; i – индекс силы.

Из формул (1.2) следует такое правило знаков для слагаемых при составлении выражения для поперечной силы Q_y в поперечном сечении стержня (рис. 1.2):

если проекция внешней силы P_{iy} , действующей до сечения, положительна, то она входит положительным слагаемым в выражение для поперечной силы Q_y ;

если проекция внешней силы P_{iy} , действующей после сечения, отрицательна (рис. 1.2), то она также входит положительным слагаемым в выражение для поперечной силы Q_y .

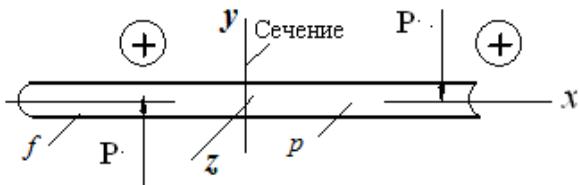


Рис. 1.2. Схема положительных слагаемых при составлении выражений для поперечной силы Q_y в поперечном сечении стержня

Изгибающий момент M_z в произвольном поперечном сечении стержня определяется на j -м участке как

$$(M_z)_j = \begin{cases} -[\sum M_z(P_i)]_f, & j = 1, 2, \dots, n, \\ [\sum M_z(P_i)]_p, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $[\sum M_z(P_i)]_f$ – сумма моментов относительно оси z поперечного сечения внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня от его начала до рассматриваемого сечения; $[\sum M_z(P_i)]_p$ – сумма моментов относительно оси z внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения до конца стержня; j – текущий номер участка; n – число участков.

Из формул (1.3) следует такое правило знаков для слагаемых при составлении выражения для изгибающего момента M_z в поперечном сечении стержня (рис. 1.3):

если момент внешних сил $M_z(P_i)$ относительно оси z направлен по часовой стрелке (если смотреть навстречу этой оси) и *действует до сечения* (рис. 1.3), то он входит положительным слагаемым в выражение для изгибающего момента M_z в поперечном сечении стержня;

если момент внешних сил $M_z(P_i)$ относительно оси z направлен против часовой стрелки (если смотреть навстречу этой оси) и *действует после сечения* (рис. 1.3), то он входит положительным слагаемым в выражение для изгибающего момента M_z в поперечном сечении стержня.

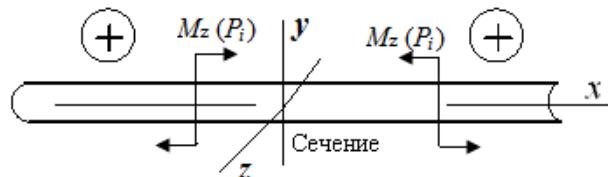


Рис. 1.3. Схема для определения знаков слагаемых при составлении выражений для изгибающего момента M_z в поперечном сечении стержня

После определения внутренних силовых факторов Q_y и M_z в поперечных сечениях на каждом участке стержня переходим к определению внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня, нагруженного внешними силами уже в другой плоскости, совпадающей с главной плоскостью $z - x$ стержня (рис. 1.4, в).

Ось y перпендикулярна плоскости нагружения и направлена к наблюдателю.

Последовательность расчета соответствует изложенной выше:

- отбрасываются внешние связи, а их действие заменяется неизвестными реакциями связей Z_A и M_{Ay} (рис. 1.4, г);

- составляются уравнения равновесия, из которых могут быть определены неизвестные реакции связей;
- составляются уравнения для определения внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня на различных его участках.

Внутренними силовыми факторами в поперечных сечениях при нагружении стержня, испытывающего изгиб, в плоскости $z - x$ является поперечная сила Q_z и изгибающий момент M_y .

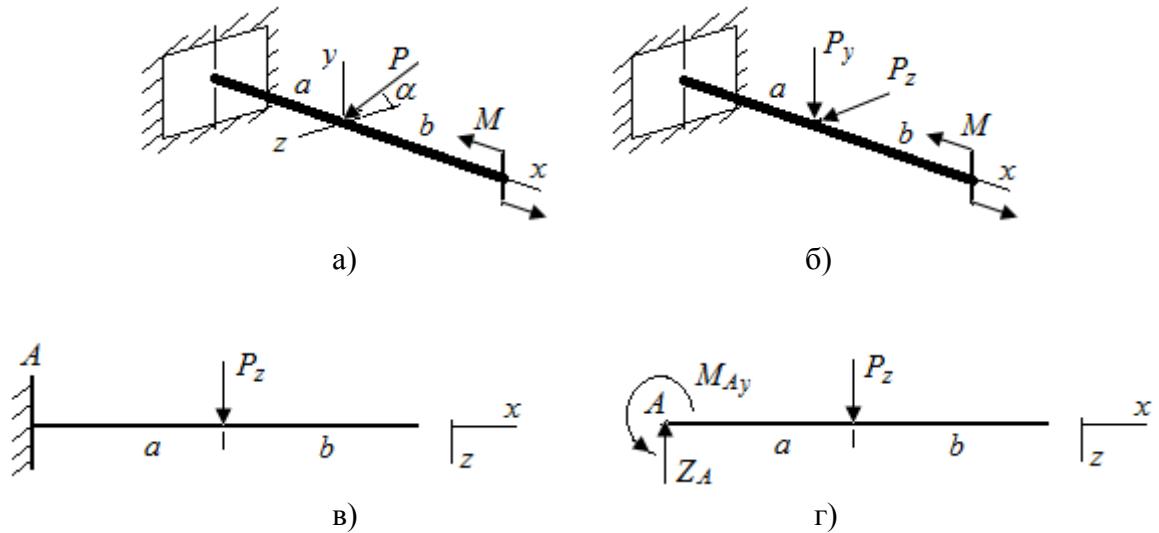


Рис. 1.4. Схемы нагружения стержня: а) схема нагружения, когда силовая плоскость не совпадает с главными плоскостями стержня; б) схема нагружения, когда сила P разложена на составляющие, лежащие в главных плоскостях; в) схема нагружения стержня в плоскости z - x ; г) схема нагружения стержня в плоскости y - x при замене внешней связи неизвестными опорными реакциями Z_A и M_{Ay}

Поперечная сила Q_z в произвольном поперечном сечении на произвольном j -м участке определяется как

$$(Q_z)_j = \begin{cases} -(\sum P_{iz})_f, & j = 1, 2, \dots, n, \\ (\sum P_{iz})_p, & \end{cases} \quad (1.4)$$

где $(\sum P_{iz})_f$ – сумма проекций на ось z внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня от его начала до рассматриваемого сечения; $(\sum P_{iz})_p$ – сумма проекций на ось z внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения до конца стержня; j – текущий номер участка; n – число участков.

Так как ось z на схемах (рис. 1.4, в, г) направлена вниз, то из формул (1.4) следует такое правило знаков для слагаемых при составлении выражения для поперечной силы Q_z в поперечном сечении стержня (рис. 1.5):

если проекция внешней силы P_{iz} , **действующей до сечения**, отрицательна (т. е. направлена вверх противоположно оси z), то она входит положительным слагаемым в выражение для поперечной силы Q_z ;

если проекция внешней силы P_{iz} , **действующей после сечения**, положительна (т. е. направлена вниз по направлению оси z), то она входит положительным слагаемым в выражение для поперечной силы Q_z .

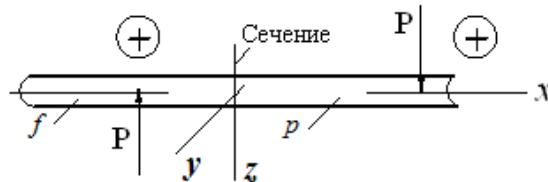


Рис. 1.5. Схема для определения знаков слагаемых при составлении выражений для поперечной силы Q_z в поперечном сечении стержня

Изгибающий момент M_y в произвольном поперечном сечении стержня на j -м участке определяется как

$$M_{y_j} = \begin{cases} -[\sum M_y(P_i)]_f, & j = 1, 2, \dots, n, \\ [\sum M_y(P_i)]_p, & \end{cases} \quad (1.5)$$

где $[\sum M_y(P_i)]_f$ – сумма моментов относительно оси y поперечного сечения внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня от его начала до рассматриваемого сечения; $[\sum M_y(P_i)]_p$ – сумма моментов относительно оси y внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения до конца стержня; j – текущий номер участка; n – число участков.

Из формул (1.5) следует такое правило знаков для слагаемых при составлении выражения для изгибающего момента M_y в поперечном сечении стержня (рис. 1.6):

если момент внешних сил $M_y(P_i)$ относительно оси y отрицателен (т. е. направлен по часовой стрелке, если смотреть навстречу этой оси) и **действует до сечения** (рис. 1.6), то он входит положительным слагаемым в выражение для изгибающего момента M_y в поперечном сечении стержня;

если момент внешних сил $M_y(P_i)$ относительно оси y положителен (т. е. направлен против часовой стрелки, если смотреть навстречу этой оси) и **действует после сечения** (рис. 1.6), то он входит положительным слагаемым в выражение для изгибающего момента M_y в поперечном сечении стержня.

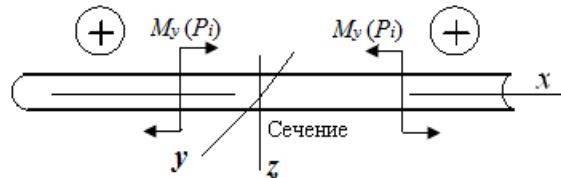


Рис. 1.6. Схема для определения знаков слагаемых при составлении выражений для изгибающего момента M_y в поперечном сечении стержня

1.2. Напряжения в точках поперечного сечения при косом изгибе

1.2.1. Расчетные зависимости

Рассмотрим поперечное сечение стержня (рис. 1.7, а), испытывающего косой изгиб. В поперечном сечении действуют следующие внутренние силовые факторы: **поперечные силы** Q_y и Q_z , **изгибающие моменты** M_z и M_y .

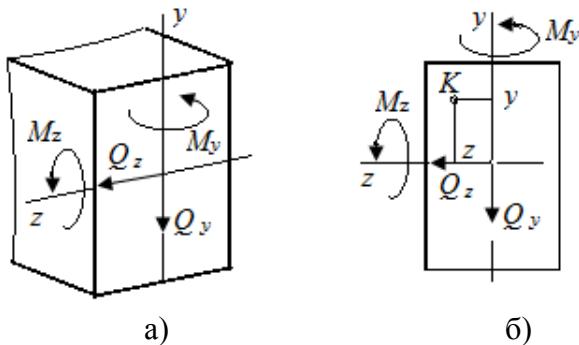


Рис. 1.7. Схема поперечного сечения стержня с изображением поперечных сил Q_y , Q_z и изгибающих моментов M_y , M_z

Плоскость действия изгибающих моментов M_z и M_y проходит через главные центральные оси y и z поперечного сечения. Используя принцип независимости действия сил, можно задачу определения напряжений в точках поперечного сечения при косом изгибе свести к задачам определения напряжений в точках поперечного сечения при поперечном изгибе, рассматривая отдельно поперечный изгиб стержня в плоскости $y - x$ и поперечный изгиб стержня в плоскости $z - x$. Затем следует просуммировать полученные результаты.

Вычислим напряжения в некоторой произвольной точке K произвольного сечения (рис. 1.7, б), положение которой определяется координатами y и z . Нормальные напряжения в заданной точке определяются как

$$\sigma = \sigma(M_z) + \sigma(M_y), \quad (1.6)$$

где $\sigma(M_z)$ и $\sigma(M_y)$ – нормальные напряжения в точке от действия изгибающих моментов M_z и M_y в рассматриваемом поперечном сечении.

Касательные напряжения τ в заданной точке определяются как

$$\tau = \sqrt{\tau^2(Q_y) + \tau^2(Q_z)}, \quad (1.7)$$

где $\tau(Q_y)$ и $\tau(Q_z)$ – касательные напряжения в точке от действия поперечных сил Q_y и Q_z в рассматриваемом поперечном сечении.

Для принятого направления координатных осей нормальные напряжения $\sigma(M_z)$ в произвольной точке от действия изгибающего момента M_z могут быть вычислены по формуле

$$\sigma(M_z) = -M_z y / J_z, \quad (1.8)$$

где J_z – момент инерции поперечного сечения относительно оси z ; y – координата точки по оси y .

Знак минус означает, что при положительных значениях изгибающего момента M_z в точках поперечного сечения, имеющих положительные значения координаты y , возникнут нормальные напряжения сжатия.

Нормальные напряжения $\sigma(M_y)$ в произвольной точке поперечного сечения от действия изгибающего момента M_y могут быть вычислены по формуле

$$\sigma(M_y) = \frac{M_y}{J_y} z, \quad (1.9)$$

где J_y – момент инерции поперечного сечения относительно оси y ; z – координата точки по оси z .

Нормальные напряжения σ в произвольной точке поперечного сечения от действия изгибающих моментов M_z и M_y определяются как

$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \quad (1.10)$$

Касательные напряжения $\tau(Q_y)$ и $\tau(Q_z)$ в произвольной точке поперечного сечения (рис. 1.8) от действия поперечных сил Q_y и Q_z могут быть определены по формуле Журавского соответственно как

$$\tau(Q_y) = \frac{Q_y S_z^*}{J_z b_y}, \quad \tau(Q_z) = \frac{Q_z S_y^*}{J_y b_z}, \quad (1.11)$$

где b_y – длина отрезка поперечного сечения, параллельного оси z , проходящего через точки поперечного сечения, имеющие координаты y (рис. 1.8, а); b_z – длина отрезка поперечного сечения, параллельного оси y , проходящего через точки поперечного сечения, имеющие координаты z (рис. 1.8, б); S_z^* – статический момент относительно оси z части

поперечного сечения, расположенной по оси y над отрезком b_y (на рис. 1.8, а эта часть сечения заштрихована); S_y^* – статический момент относительно оси y части поперечного сечения, расположенной по оси z от отрезка b_z (на рис. 1.8, б эта часть сечения заштрихована).

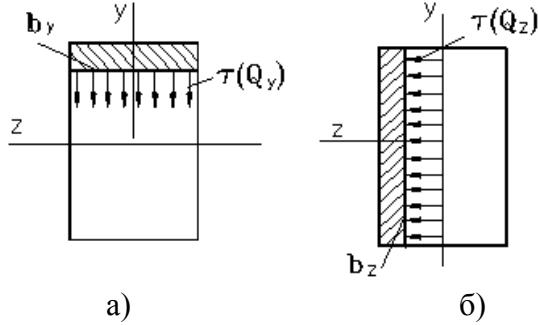


Рис. 1.8. Касательные напряжения $\tau(Q_y)$ и $\tau(Q_z)$ от поперечных сил Q_y и Q_z в точках поперечного сечения, лежащих на отрезке b_y (схема а) и b_z (схема б)

В дальнейшем ограничимся рассмотрением длинных стержней, когда влияние касательных напряжений на напряженное состояние в опасных точках несущественно и их можно не учитывать.

1.2.2. Нулевая линия в поперечном сечении при косом изгибе

При косом изгибе в поперечном сечении существуют такие точки (обозначим координаты этих точек y_0 и z_0), для которых $\sigma = 0$. Из (1.10)

$$-\frac{M_z}{J_z}y_0 + \frac{M_y}{J_y}z_0 = 0, \quad (1.12)$$

откуда следует, что

$$z_0 = \frac{M_z}{M_y} \frac{J_y}{J_z} y_0. \quad (1.13)$$

Обозначим постоянную величину

$$\frac{M_z}{M_y} \frac{J_y}{J_z} = k. \quad (1.14)$$

Тогда

$$z_0 = ky_0. \quad (1.15)$$

Это уравнение прямой линии, проходящей через начало координат (центр тяжести сечения) с угловым коэффициентом

$$k = \operatorname{tg}\beta, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{M_z}{M_y} \frac{J_y}{J_z}, \quad (1.16)$$

где β – угол между координатной осью y и линией, в точках которой нормальные напряжения σ равны нулю.

Эта линия называется **нулевой (или нейтральной)** линией.

Рассмотрим поперечное сечение, в котором при известных значениях M_z, M_y, J_y, J_z можно построить нулевую линию (рис. 1.9, а).

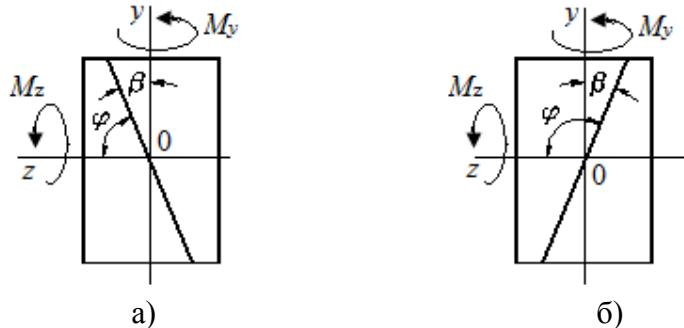


Рис. 1.9. Положение нулевой линии в поперечном сечении:
а) если угол $\beta > 0$, б) если угол $\beta < 0$

Угол β между осью y и нулевой линией определяется как

$$\beta = \arctg k, \quad \beta = \arctg \frac{M_z J_y}{M_y J_z}. \quad (1.17)$$

Если угол $\beta > 0$, то он должен быть отложен от оси y против часовой стрелки (рис. 1.9, а). Если угол $\beta < 0$, то этот угол должен быть отложен относительно оси y по часовой стрелке (рис. 1.9, б).

Положение нулевой линии можно задать также и углом φ , определяющим ориентацию нулевой линии относительно оси z . Несложно заметить (рис. 1.9, а, б), что

$$\varphi = \pi/2 - \beta, \quad (1.18)$$

причем угол φ откладывается от оси z по часовой стрелке. Учитывая, что

$$\tg \varphi = \tg \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \ctg \beta = \frac{1}{\tg \beta},$$

имеем

$$\tg \varphi = \frac{1}{k} = \frac{M_y J_z}{J_y M_z}. \quad (1.19)$$

1.2.3. Опасные точки в поперечном сечении при косом изгибе

Рассмотрим положение произвольной точки K (рис. 1.10, а) относительно нулевой линии. Точка K имеет координаты y и z . Введем новую систему координатных осей y_h и z_h , проходящих через центр тяжести поперечного сечения таким образом, что ось y_h совпадает с нулевой линией, а ось z_h перпендикулярна ей (рис. 1.10, а).

Координаты точки K в новой системе координат, повернутой относительно осей y и z на угол β , могут быть определены из выражений

$$\begin{aligned} y_h &= y \cos \beta + z \sin \beta, \\ z_h &= z \cos \beta - y \sin \beta. \end{aligned} \quad (1.20)$$

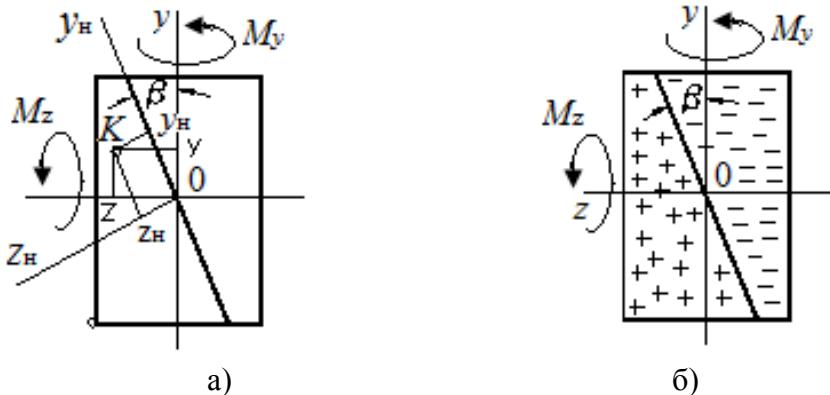


Рис. 1.10. Положение произвольной точки K относительно нулевой линии (схема а) и зоны растяжения и сжатия в поперечном сечении (схема б)

Заметим, что модуль координаты z_h (рис. 1.10, а) определяет расстояние от точки K до нулевой линии.

Ранее мы установили, что нормальные напряжения в произвольной точке при косом изгибе равны

$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z.$$

Преобразуем данное равенство следующим образом

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} \left(z - \frac{M_z}{J_z} \frac{M_y}{J_y} y \right).$$

Учитывая, что из (1.14) и (1.16) $\frac{M_z}{J_z} \frac{J_y}{M_y} = \operatorname{tg} \beta$, получим

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} (z - \operatorname{tg} \beta \cdot y) = \frac{M_y}{J_y} \frac{z \cos \beta - y \sin \beta}{\cos \beta}.$$

Так как из (1.20) $z \cos \beta - y \sin \beta = z_h$, то

$$\sigma = \frac{M_y z_h}{J_y \cos \beta}, \quad (1.21)$$

т. е. нормальные напряжения пропорциональны координате z_h , модуль которой определяет расстояние от точки до нулевой линии. Следовательно, *опасными* будут те точки поперечного сечения, которые наиболее удалены от нулевой линии, т. е. $|z_h| = \max$.

Нормальные напряжения в точках поперечного сечения при необходимости могут быть выражены в зависимости от изгибающего момента M_z . Так как

$$\frac{M_z}{J_z} \frac{J_y}{M_y} = \operatorname{tg} \beta, \quad \text{то} \quad \frac{M_y}{J_y \cos \beta} = \frac{M_z}{J_z \sin \beta}.$$

Тогда, учитывая (1.21), имеем, что

$$\sigma = \frac{M_z z_h}{J_z \sin \beta}. \quad (1.22)$$

Чем удобно использовать выражение (1.21) для определения нормальных напряжений? Сомножители в знаменателе $J_y > 0$, $\cos \beta > 0$ всегда положительны (как при $\beta > 0$, так и при $\beta < 0$). В точках поперечного сечения, имеющих положительные координаты ($z_h > 0$), при положительных значениях изгибающего момента $M_y > 0$ будут иметь место напряжения растяжения, т. е. $\sigma > 0$. И наоборот, если значения изгибающего момента $M_y < 0$, то в точках поперечного сечения, имеющих положительные координаты ($z_h > 0$), будут иметь место деформации сжатия, т. е. $\sigma < 0$.

Нулевая линия делит поперечное сечение на две зоны: зону растяжения и зону сжатия. На рис. 1.10, б показано поперечное сечение, положение нулевой линии в поперечном сечении, действие изгибающих моментов M_z и M_y . Так как $M_y > 0$, то все точки поперечного сечения, имеющие $z_h > 0$, будут испытывать растяжение. На рис. 1.10, б зона растяжения обозначена знаками «+».

Другая часть поперечного сечения – зона сжатия. На рис. 1.10, б зона сжатия обозначена знаками «–». Где следует искать опасные точки?

Анализируя выражение $z_h = z \cos \beta - y \sin \beta$, заметим, что, если оси y и z делят поперечное сечение на части в 1-м, 2-м, 3-м и 4-м квадрантах (рис. 1.11, а, б), то при $\beta > 0$ опасные точки следует искать во 2-м квадранте для точек $z > 0$ и $y < 0$ и в 4-м квадранте для точек $z < 0$ и $y > 0$ (рис. 1.11, а).

При $\beta < 0$ (рис. 1.11, б) опасные точки следует искать в 1-м квадранте для точек $z_h > 0$ и $y > 0$ и в 3-м квадранте для точек $z_h < 0$ и $y < 0$.

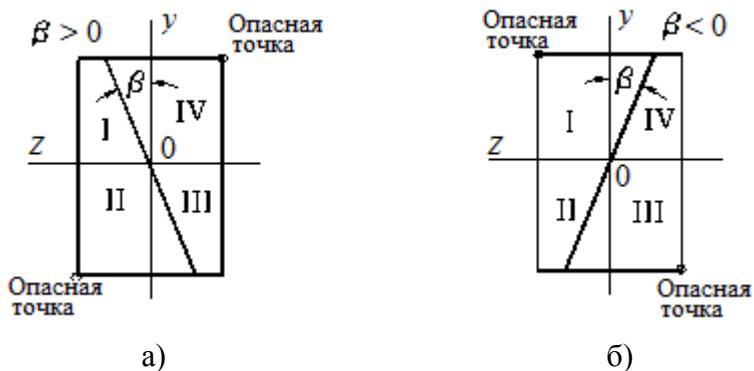


Рис. 1.11. Положение опасных точек в поперечном сечении:
а) если угол $\beta > 0$, б) если угол $\beta < 0$

Если точки A_i – опасные точки поперечного сечения, имеющие координаты y_{A_i}, z_{A_i} в системе координатных осей y и z , и таких точек несколько ($i = 1, 2, \dots, n$), то нормальные напряжения в этих точках могут быть определены как

$$\sigma_{A_i} = -\frac{M_z}{J_z} y_{A_i} + \frac{M_y}{J_y} z_{A_i}. \quad (1.23)$$

Представим данное равенство в виде

$$\sigma_{A_i} = -\frac{M_z}{J_z} \frac{y_{\max}}{y_{\max}} y_{A_i} + \frac{M_y}{J_y} \frac{z_{\max}}{z_{\max}} z_{A_i},$$

где y_{\max}, z_{\max} – максимальные значения координат, которые имеют точки поперечного сечения.

Учитывая, что $J_z / y_{\max} = W_z$, $J_y / z_{\max} = W_y$, получим

$$\sigma_{A_i} = -\frac{M_z}{W_z} \frac{y_{A_i}}{y_{\max}} + \frac{M_y}{W_y} \frac{z_{A_i}}{z_{\max}}, \quad (1.24)$$

где W_z, W_y – осевые моменты сопротивления сечения.

Преобразуем (1.24) к виду

$$\sigma_{A_i} = \frac{1}{W_z} \left(-M_z \frac{y_{A_i}}{y_{\max}} + M_y \frac{W_z}{W_y} \frac{z_{A_i}}{z_{\max}} \right), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (1.25)$$

Если обозначим

$$M_{\text{пп}} = -M_z \frac{y_{A_i}}{y_{\max}} + M_y \frac{W_z}{W_y} \frac{z_{A_i}}{z_{\max}}, \quad (1.26)$$

то $\sigma_{A_i} = M_{\text{пп}} / W_z$, (1.27)

где $M_{\text{пп}}$ – приведенный изгибающий момент в поперечном сечении стержня.

1.2.4. Силовая линия в поперечном сечении стержня

Помимо понятия нулевой линии при косом изгибе встречается понятие **силовой линии** – линии пересечения плоскости действия изгибающего момента с поперечным сечением стержня.

На рис. 1.12 показано поперечное сечение стержня. Изгибающие моменты M_z и M_y , как векторы, лежат в плоскости поперечного сечения и направлены вдоль координатных осей z и y . Они являются составляющими вектора полного изгибающего момента M_u , величина которого определяется как

$$M_u = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$

Полный изгибающий момент \bar{M}_i , как вектор, лежит в плоскости поперечного сечения (рис. 1.12), перпендикулярен плоскости действия изгибающего момента (силовой плоскости) и совпадает по направлению с линией $n-n$ поперечного сечения, составляющей угол α с осью y .
Поясним понятие силовой линии.

Линия пересечения плоскости действия полного изгибающего момента M_i (силовой плоскости) с поперечным сечением стержня образует силовую линию в поперечном сечении (линия $s-s$, рис. 1.12).

Заметим, что составляющие полного изгибающего момента M_z и M_y соответственно равны:

$$M_z = M_i \cos \alpha, \quad M_y = M_i \sin \alpha.$$

Тангенс угла α равен отношению моментов M_z и M_y : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_z}{M_y}$.

Сопоставляя данное равенство с зависимостью (1.16) для $\operatorname{tg} \beta$, заметим, что если осевые моменты инерции J_y и J_z поперечного сечения равны между собой, то

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \quad \beta = \alpha,$$

т. е. нулевая линия поперечного сечения (при $J_y = J_z$) совпадает с направлением вектора полного изгибающего момента M_i , а, следовательно, перпендикулярна силовой линии.

1.3. Расчет на прочность при косом изгибе

Расчет на прочность при косом изгибе связан с анализом условия прочности, которое можно сформулировать следующим образом: величина нормальных напряжений в опасных точках опасного сечения по модулю не должна превышать допускаемых

$$|\sigma_{A_i}| \leq [\sigma]. \quad (1.28)$$

Естественно, возникает необходимость определения положения опасного сечения и опасных точек в этом сечении. Для этого после определения внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня на различных его участках следует найти значения приведенного момента

$$M_{np} = -M_z \frac{y_{A_i}}{y_{\max}} + M_y \frac{W_z}{W_y} \frac{z_{A_i}}{z_{\max}}.$$

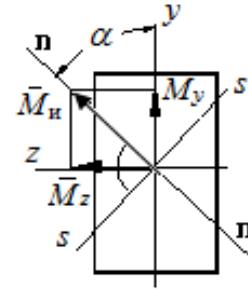


Рис. 1.12. Силовая линия $s-s$ в поперечном сечении

Наиболее просто эта задача решается для случая плоского косого изгиба стержня с постоянным профилем поперечного сечения по длине стержня. В этом случае ориентация нулевой линии в любом поперечном сечении одна и та же (т. е. $\beta = \text{const}$), отношение координат $\frac{y_{A_i}}{y_{\max}}$ и $\frac{z_{A_i}}{z_{\max}}$ является постоянным для любого поперечного сечения, постоянно также отношение осевых моментов сопротивления. Тогда опасным будет то сечение, где модуль приведенного момента

$$|M_{\text{пп}}| = \left| M_z \frac{y_{A_i}}{y_{\max}} + M_y \frac{W_z}{W_y} \frac{z_{A_i}}{z_{\max}} \right|$$

достигает максимального значения.

Сложнее решение задачи для случая неплоского косого изгиба, когда ориентация нулевой линии в различных поперечных сечениях различна. Следовательно, опасными точками в различных поперечных сечениях могут быть неоднотипные точки поперечного сечения. Решается эта задача методом подбора: путем расчета приведенного момента $M_{\text{пп}}$ в нескольких сечениях, где изгибающие моменты M_z и M_y значительны по модулю.

Если поперечное сечение стержня имеет прямоугольный профиль (как это представлено на рис. 1.13), то процедура расчета на прочность значительно упрощается. Связано это с тем, что опасными точками поперечного сечения при любой ориентации нулевой линии будут угловые точки: точки A_1 и A_3 при $\beta < 0$ (рис. 1.13, а) и точки A_2 и A_4 при $\beta > 0$ (рис. 1.13, б).

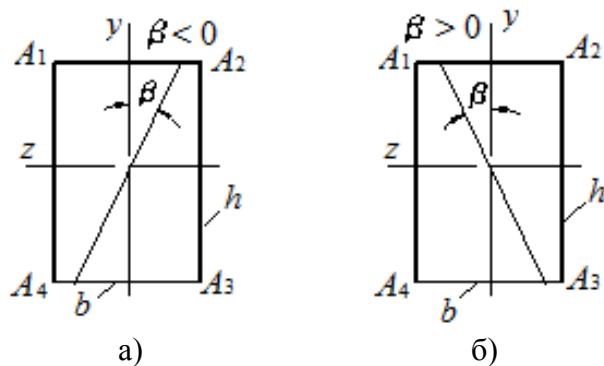


Рис. 1.13. Положение нулевой линии в поперечном сечении:
а) если угол $\beta < 0$, б) если угол $\beta > 0$

Так как для опасных точек прямоугольника модуль отношений

$$\left| \frac{y_{A_i}}{y_{\max}} \right| = 1, \quad \left| \frac{z_{A_i}}{z_{\max}} \right| = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

то модуль приведенного момента для прямоугольного поперечного сечения из (1.26) может быть вычислен как

$$|M_{\text{пр}}| = |M_z| + |M_y| \frac{W_z}{W_y}, \quad (1.29)$$

а модуль нормальных напряжений в опасных точках прямоугольного сечения из (1.27) будет равен

$$|\sigma_{A,i}| = \frac{|M_{\text{пр}}|}{W_z}, \quad \begin{array}{ll} i=1,3 & \text{при } \beta < 0, \\ i=2,4 & \text{при } \beta > 0, \end{array} \quad (1.30)$$

а с учетом (1.29) условие прочности (1.28) для прямоугольного поперечного сечения примет вид

$$\frac{|M_z| + |M_y| \frac{W_z}{W_y}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (1.31)$$

Если расчет на прочность стержня с прямоугольным поперечным сечением при косом изгибе является поверочным расчетом (известны значения M_z и M_y в опасном сечении, осевые моменты сопротивления поперечного сечения W_z и W_y , допускаемые напряжения $[\sigma]$), то процедура расчета сводится к анализу выполнения неравенства (1.31) в опасном сечении.

Если расчет стержня с прямоугольным поперечным сечением является проектировочным и требуется, например, определить геометрические параметры сечения, то из (1.31) следует, что

$$W_z \geq \frac{|M_z| + |M_y| \frac{W_z}{W_y}}{[\sigma]}. \quad (1.32)$$

Так как для прямоугольного поперечного сечения (рис. 1.13)

$$W_z = \frac{bh^2}{6}, \quad W_y = \frac{hb^2}{6}, \quad \frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b}, \quad (1.33)$$

где b – основание прямоугольника; h – высота, то из (1.32) имеем

$$\frac{bh^2}{6} \geq \frac{|M_z| + |M_y| \frac{h}{b}}{[\sigma]}. \quad (1.34)$$

Если задано соотношение сторон прямоугольника

$$\frac{b}{h} = \mu, \quad (1.35)$$

то $b = \mu h$, $\frac{h}{b} = \frac{1}{\mu}$. (1.36)

Учитывая (1.35) в (1.34), получим

$$\frac{\mu h^3}{6} \geq \frac{|M_z| + |M_y| \frac{1}{\mu}}{[\sigma]},$$

откуда

$$h^3 = 6 \frac{\mu |M_z| + |M_y|}{\mu^2 [\sigma]}, \quad h \leq \sqrt[3]{6 \frac{\mu |M_z| + |M_y|}{\mu^2 [\sigma]}}, \quad (1.37)$$

где $\mu = \frac{b}{h}$ – отношение сторон прямоугольного поперечного сечения.

1.4. Определение перемещений при косом изгибе

При определении линейных и угловых перемещений поперечного сечения при косом изгибе вновь используем принцип независимости действия сил, вычисляя перемещения при нагружении стержня отдельно в каждой главной плоскости.

Обозначим перемещения центра тяжести поперечного сечения в направлении главной центральной оси y через v , а в направлении главной центральной оси z – через w . Обозначим углы поворота поперечного сечения вокруг оси z через θ_z , а вокруг оси y – через θ_y .

Рассматривая нагружение стержня в главной плоскости $y-x$, ищем для произвольного поперечного сечения перемещения v и θ_z . Линейные перемещения v в главной плоскости $y-x$ можно определить из решения дифференциального уравнения упругой линии стержня вида

$$v'' = \frac{M_z}{EJ_z}, \quad (1.38)$$

где E – модуль упругости 1-го рода материала стержня; J_z – момент инерции поперечного сечения относительно оси z .

Интегрируя (1.38), приходим к выражению

$$v' = v'_0 + \int_{x_0}^x \frac{M_z}{EJ_z} dx. \quad (1.39)$$

Так как

$$v' = \theta_z, \quad v'_0 = (\theta_z)_0, \quad (1.40)$$

то имеем

$$\theta_z = (\theta_z)_0 + \int_{x_0}^x \frac{M_z}{EJ_z} dx, \quad (1.41)$$

где $(\theta_z)_0$ – угол поворота вокруг оси z поперечного сечения, положение которого определяется координатой x_0 ; θ_z – угол поворота вокруг оси z поперечного сечения, положение которого определяется координатой x .

Уравнение (1.41) позволяет производить расчет угла поворота θ_z произвольного поперечного сечения стержня, если известны значение $(\theta_z)_0$, функция изгибающего момента M_z , модуль упругости E , осевой момент инерции сечения J_z .

Интегрируя (1.39), приходим к выражению

$$v = v_0 + \int_{x_0}^x v'_0 dx + \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^x \frac{M_z}{EJ_z} dx \right) dx. \quad (1.42)$$

Из (1.41)

$$\int_{x_0}^x \frac{M_z}{EJ_z} dx = \theta_z - (\theta_z)_0.$$

Тогда из (1.42) следует

$$v = v_0 + \int_{x_0}^x (\theta_z)_0 dx + \int_{x_0}^x [\theta_z - (\theta_z)_0] dx = v_0 + \int_{x_0}^x \theta_z dx, \quad (1.43)$$

где v_0 – перемещение в направлении оси y центра тяжести сечения, положение которого определяется координатой x_0 .

Уравнение (1.43) позволяет производить расчет перемещения v центра тяжести поперечного сечения, если известны значения v_0 и функция θ_z .

Если нас интересуют перемещения конкретного поперечного сечения стержня, то вычисление линейного перемещения v_c и угла поворота поперечного сечения $(\theta_z)_c$ можно производить путем вычислений соответствующих интегралов Мора

$$v_c = \int_l \frac{M_z \bar{M}_1}{EJ_z} dx, \quad (\theta_z)_c = \int_l \frac{M_z \bar{M}_1^*}{EJ_z} dx, \quad (1.44)$$

где \bar{M}_1 – функция изгибающего момента в поперечных сечениях стержня от действия безразмерной единичной силы, приложенной в точке C продольной оси стержня в направлении оси y ; \bar{M}_1^* – функция изгибающего момента в поперечных сечениях стержня от действия безразмерного единичного момента, поворачивающего сечение C вокруг оси z .

Далее рассматриваем нагружение стержня в главной плоскости $z-x$ и ищем для произвольного поперечного сечения перемещения w и θ_y .

Линейные перемещения w в главной плоскости $z-x$ можно определить из решения дифференциального уравнения упругой линии стержня вида

$$w'' = \frac{M_y}{EI_y}, \quad (1.45)$$

где J_y – момент инерции поперечного сечения относительно оси y .

Интегрируя (1.45), приходим к выражению

$$w = w'_0 + \int_{x_0}^x \frac{M_y}{EI_y} dx. \quad (1.46)$$

Так как

$$w' = \theta_y, \quad w'_0 = (\theta_y)_0, \quad (1.47)$$

то имеем выражение для расчета угла поворота вокруг оси y поперечного сечения, положение которого определяется координатой x ,

$$\theta_y = (\theta_y)_0 + \int_{x_0}^x \frac{M_y}{EI_y} dx, \quad (1.48)$$

где $(\theta_y)_0$ – угол поворота вокруг оси y поперечного сечения, положение которого определяется координатой x_0 .

Уравнение (1.48) позволяет производить расчет угла поворота θ_y произвольного поперечного сечения, если известны значения $(\theta_y)_0$, функция изгибающего момента M_y , модуль упругости E , осевой момент инерции J_y .

Интегрируя (1.46), приходим к выражению

$$w = w_0 + \int_{x_0}^x w'_0 dx + \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^x \frac{M_y}{EI_y} dx \right) dx = w_0 + (\theta_y)_0 x + \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^x \frac{M_y}{EI_y} dx \right) dx, \quad (1.49)$$

где w_0 – перемещение в направлении оси z центра тяжести сечения, положение которого определяется координатой x_0 .

Уравнение (1.49) позволяет производить расчет перемещения w центра тяжести поперечного сечения, если известны значения w_0 , $(\theta_y)_0$, E , J_y и функция изгибающего момента M_y .

Если нас интересует перемещение конкретного поперечного сечения стержня (например, сечения C), то вычисление линейного перемещения w_c и угла поворота $(\theta_y)_c$ поперечного сечения можно производить путем вычислений соответствующих интегралов Мора

$$w_c = \int_l \frac{M_y \bar{M}_1}{EI_y} dx, \quad (\theta_y)_c = \int_l \frac{M_y \bar{M}_1^*}{EI_y} dx, \quad (1.50)$$

где \bar{M}_1 – функция изгибающего момента в поперечных сечениях стержня от действия безразмерной единичной силы, приложенной в точке C продольной оси стержня в направлении оси z ; \bar{M}_1^* – функция изгибающего момента в поперечных сечениях стержня от действия безразмерного единичного момента, поворачивающего сечение C вокруг оси y .

Определив линейные и угловые перемещения при нагружении стержня в главных плоскостях, можно перейти к определению полных линейных и угловых перемещений. Перемещение центра тяжести поперечного сечения (полное перемещение) и угол поворота поперечного сечения (полное его значение) определяются как

$$\Delta = \sqrt{v^2 + w^2}, \quad \theta = \sqrt{\theta_y^2 + \theta_z^2}. \quad (1.51)$$

Направление полного перемещения Δ можно найти из отношений

$$\frac{v}{\Delta} = \cos \alpha_n, \quad \frac{w}{\Delta} = \sin \alpha_n, \quad \frac{w}{v} = \operatorname{tg} \alpha_n,$$

откуда

$$\alpha_n = \arccos \frac{v}{\Delta}, \quad \alpha_n = \arcsin \frac{w}{\Delta}, \quad \alpha_n = \operatorname{arctg} \frac{w}{v}, \quad (1.52)$$

где α_n – угол между осью y и направлением полного перемещения.

2. ПРИМЕР. РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

Стальной стержень (модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа) прямоугольного поперечного сечения расположен на шарнирных опорах (рис. 2.1), главные плоскости стержня – плоскости $y-x$ и $z-x$.

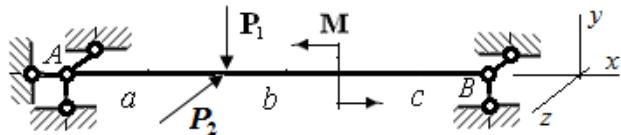


Рис. 2.1. Расчетная схема нагружения стержня в главных плоскостях $y-x$ и $z-x$

В плоскости $y-x$ на стержень действуют сила P_1 и момент пары сил M , а в плоскости $z-x$ действует сила P_2 .

Требуется:

1. Определить поперечные силы Q_y , Q_z , изгибающие моменты M_z и M_y в поперечных сечениях стержня (оси y , z – главные центральные оси поперечного сечения), построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

2. Определить положение опасного сечения.

3. Из условия прочности при допускаемом напряжении $[\sigma] = 160$ МПа подобрать размеры поперечного сечения стержня при заданном соотношении сторон $h/b = 2$, где h и b – соответственно высота и ширина прямоугольного сечения.

4. Определить положение нулевой линии в опасном сечении стержня, найти опасные точки, построить для этого сечения эпюру нормальных напряжений (построение выполнить в аксонометрии).

Исходные данные: $a = b = c = 1$ м, $P_1 = 70$ кН, $P_2 = 60$ кН, $M = 10$ кН·м.

Решение:

Рассмотрим вначале нагружение стержня в плоскости $y-x$ (рис. 2.2, а). Отбросим внешние связи (шарнирные опоры) и заменим их действие неизвестными реакциями связей Y_A и Y_B (рис. 2.2, б). Реакции связи в направлении оси x отсутствуют, так как проекции внешних активных сил на ось x равны нулю.

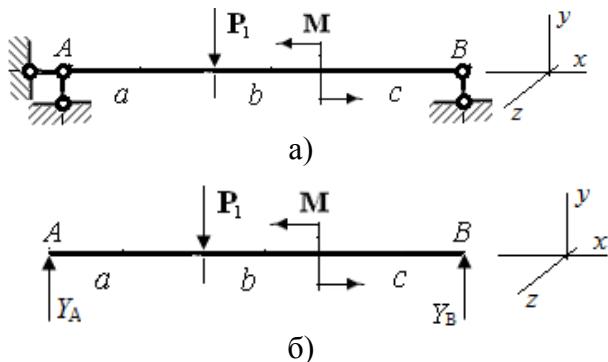


Рис. 2.2. Расчетная схема нагружения стержня: а) расчетная схема нагружения стержня главной плоскости $y-x$; б) расчетная схема нагружения стержня с заменой опор реакциями Y_A и Y_B

Для определения реакций Y_A и Y_B воспользуемся уравнениями равновесия:
а) сумма моментов сил относительно точки A равна нулю:

$$\sum M_A(P_i) = 0, \quad -P_1 a + M + Y_B(a + b + c) = 0,$$

откуда

$$Y_B = \frac{P_1 a - M}{a + b + c} = \frac{70 \cdot 1 - 10}{3} = 20 \text{ кН};$$

б) сумма моментов сил относительно точки B равна нулю: $\sum M_B(P_i) = 0$, которое представим как

$$-Y_A(a + b + c) + P_1(b + c) + M = 0,$$

откуда

$$Y_A = \frac{P_1(b + c) + M}{a + b + c} = \frac{70 \cdot 2 + 10}{3} = 50 \text{ кН}.$$

Рассмотрим теперь расчетную схему стержня, представленную на рисунке 2.3.

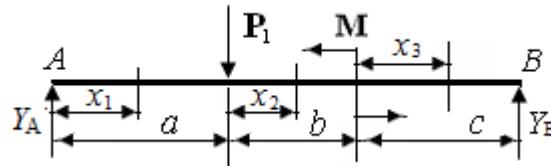


Рис. 2.3. Расчетная схема и положение секущих сечений на участках

Стержень имеет 3 участка ($n = 3$). Положение произвольного поперечного сечения на 1-м участке определяется координатой x_1 ($0 \leq x_1 \leq a$), положение произвольного поперечного сечения на 2-м участке определяется координатой x_2 ($0 \leq x_2 \leq b$), положение произвольного поперечного сечения на 3-м участке определяется координатой x_3 ($0 \leq x_3 \leq c$).

Определим поперечную силу Q_y в поперечных сечениях стержня на различных участках. Для 1-го участка стержня (рис. 2.3) удобнее использовать уравнение:

$$Q_{y_1} = \left(\sum P_{iy} \right)_f = (Y_A) = Y_A = 50 \text{ кН}, \quad 0 \leq x_1 \leq a.$$

Для 2-го участка стержня также можно использовать уравнение:

$$Q_{y_2} = \left(\sum P_{iy} \right)_f = Y_A - P_1 = 50 - 70 = -20 \text{ кН}, \quad 0 \leq x_2 \leq b.$$

Для 3-го участка стержня удобнее использовать уравнение:

$$Q_{y_3} = - \left(\sum P_{iy} \right)_P = -Y_B = -20 \text{ кН}, \quad 0 \leq x_3 \leq c.$$

Определим изгибающий момент в поперечных сечениях стержня на различных участках. Для 1-го участка стержня $0 \leq x_1 \leq a$ (рис. 2.3):

$$M_{z_1} = - \left[\sum M_z(P_i) \right]_f = -(-Y_A x_1) = Y_A x_1 = 50 x_1,$$

$$M_{z_1} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad M_{z_1} \Big|_{x_1=a} = 50 \cdot 1 = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для 2-го участка стержня $0 \leq x_2 \leq b$ (рис. 2.3):

$$M_{z_2} = - \left[\sum M_z(P_i) \right]_f = - \left[Y_A(a + x_2) + P_1 x_2 \right] = Y_A(a + x_2) - P_1 x_2 = Y_A a + (Y_A - P_1) x_2,$$

$$M_{z_2} \Big|_{x_2=0} = Y_A a = 50 \cdot 1 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_{z_2} \Big|_{x_2=b} = 50 + (50 - 70) \cdot 1 = 50 - 20 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для 3-го участка стержня $0 \leq x_3 \leq c$ (рис. 2.3):

$$M_{z_3} = \left[\sum M_z (P_i) \right]_P = Y_B (c - x_3),$$

$$M_{z_3} \Big|_{x_3=0} = Y_B \cdot c = 20 \cdot 1 = 20 \text{ кНм}, \quad M_{z_3} \Big|_{x_3=c} = 0.$$

Определив значения поперечных сил в поперечных сечениях стержня, построим эпюру поперечной силы Q_y (рис. 2.4, б).

Определив значения изгибающего момента в поперечных сечениях стержня, построим эпюру изгибающего момента M_z (рис. 2.4, в).

На рисунке 2.4 представлены два варианта построения эпюры изгибающего момента M_z в поперечных сечениях стержня. В первом варианте при построении эпюры M_z положительные значения откладываются в верхней полуплоскости, а отрицательные значения – в нижней полуплоскости от продольной оси x .

Во втором варианте при построении эпюры M_z положительные значения откладываются в нижней полуплоскости, а отрицательные значения – в верхней полуплоскости от продольной оси x .

Первый вариант построения эпюры M_z принят при оформлении расчетов для машиностроительного направления, второй вариант – для строительного направления.

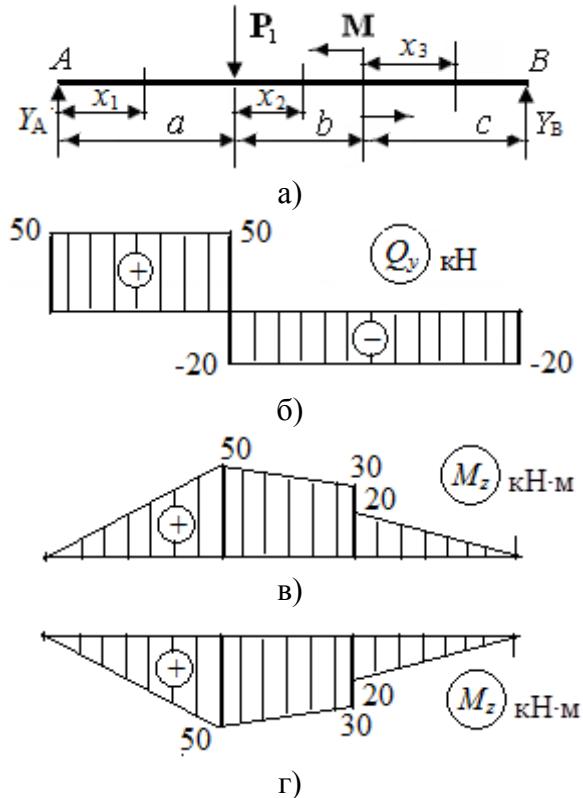
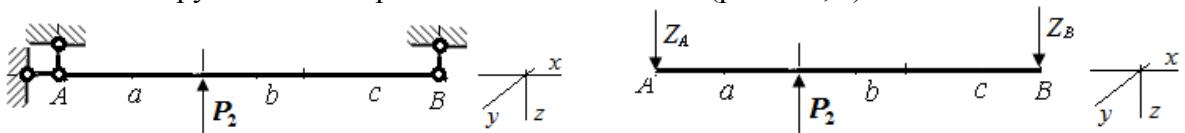


Рис. 2.4. Расчетная схема стержня, эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z : а) расчетная схема и положение секущих сечений на участках; б) эпюра поперечной силы Q_y ; в) эпюра изгибающего момента M_z (для расчетов машиностроительного направления); г) эпюра изгибающего момента M_z (для расчетов строительного направления)

Рассмотрим теперь нагружение стержня в плоскости $z-x$. Ось y перпендикулярна плоскости нагружения и направлена к наблюдателю (рис. 2.5, а).



а) Расчетная схема нагружения стержня
главной плоскости $z-x$

б) Расчетная схема нагружения стержня с
заменой опор реакциями Z_A и Z_B

Рис. 2.5. Расчетная схема нагружения стержня

Отбросим внешние связи и заменим их действие неизвестными реакциями Z_A и Z_B (рис. 2.5, б). Реакция связи в направлении оси x отсутствует, так как проекции внешних активных сил на ось x равны нулю.

Для определения реакций Z_A и Z_B воспользуемся уравнениями равновесия в виде:

а) сумма моментов сил относительно точки A равна нулю: $\sum M_A(P_i) = 0$, которое представим как $P_2a - Z_B(a + b + c) = 0$, откуда

$$Z_B = P_2 \frac{a}{a + b + c} = 60 \cdot \frac{1}{3} = 20 \text{ кН};$$

б) сумма моментов сил относительно точки B равна нулю: $\sum M_B(P_i) = 0$, которое представим как $Z_A(a + b + c) - P_2(a + b) = 0$, откуда

$$Z_A = P_2 \frac{a + b}{a + b + c} = 60 \cdot \frac{2}{3} = 40 \text{ кН}.$$

Изобразим расчетную схему стержня, как показано на рисунке 2.6.

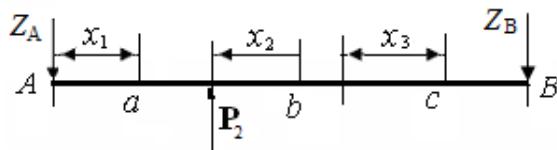


Рис. 2.6. Расчетная схема и положение секущих сечений на участках

Определим поперечную силу Q_z в поперечных сечениях стержня на различных участках. Для 1-го участка стержня

$$Q_{z_1} = -\left(\sum P_{iz}\right)_f = -(Z_A) = -Z_A = -40 \text{ кН}, \quad 0 \leq x_1 \leq a.$$

Для 2-го и 3-го участков:

$$Q_{z_2} = \left(\sum P_{iz}\right)_p = Z_B = 20 \text{ кН}, \quad 0 \leq x_2 \leq b,$$

$$Q_{z_3} = \left(\sum P_{iz}\right)_p = Z_B = 20 \text{ кН}, \quad 0 \leq x_3 \leq c.$$

Определим изгибающий момент M_y в поперечных сечениях стержня на различных участках. Для 1-го участка $0 \leq x_1 \leq a$:

$$M_{y_1} = -[\sum M_y(P_i)]_f = -(Z_A x_1) = -Z_A x_1 = -40 x_1,$$

$$M_{y_1} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad M_{y_1} \Big|_{x_1=a} = -40 \cdot a = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для 2-го и 3-го участков:

$$M_{y_2} = [\sum M_y(P_i)]_p = -Z_B(c + b - x_2) = -20(2 - x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq b,$$

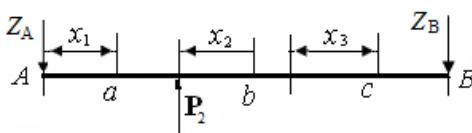
$$M_{y_2} \Big|_{x_2=0} = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_{y_2} \Big|_{x_2=b} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{y_3} = [\sum M_y(P_i)]_p = -Z_B(c - x_3) = -20(1 - x_3), \quad 0 \leq x_3 \leq c,$$

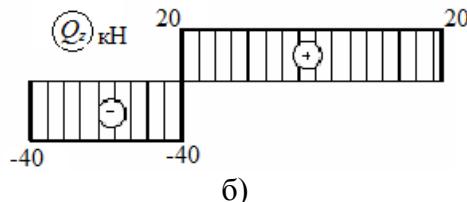
$$M_{y_3} \Big|_{x_3=0} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_{y_3} \Big|_{x_3=c} = 0.$$

Определив значения поперечных сил в поперечных сечениях стержня, построим эпюру поперечной силы Q_z (рис. 2.7, б).

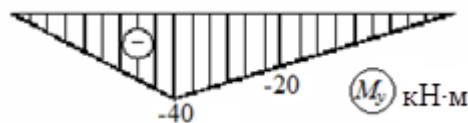
Определив значения изгибающего момента в поперечных сечениях стержня, построим эпюру изгибающего момента M_y (рис. 2.7, в, г).



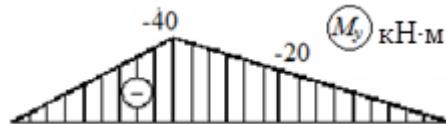
а)



б)



в)



г)

Рис. 2.7. Расчетная схема стержня, эпюры поперечной силы Q_z и изгибающего момента M_y : а) расчетная схема и положение секущих сечений на участках; б) эпюра поперечной силы Q_z ; в) эпюра изгибающего момента M_y (для расчетов машиностроительного направления); г) эпюра изгибающего момента M_y (для расчетов строительного направления)

На рисунке 2.7 представлены два варианта построения эпюр изгибающих моментов M_z и M_y в поперечных сечениях стержня. В первом варианте при построении эпюр M_z и M_y положительные значения откладывают в верхней полуплоскости, а отрицательные значения – в нижней полуплоскости от продольной оси x (для расчетов машиностроительного направления).

Во втором варианте при построении эпюр M_z и M_y положительные значения откладывают в нижней полуплоскости, а отрицательные значения – в верхней полуплоскости от продольной оси x (для расчетов строительного направления).

Последовательность расчета приведем в виде схем на рисунке 2.8. На рисунке 2.9 построены эпюры поперечных сил Q_y , Q_z и изгибающих моментов M_z , M_y .

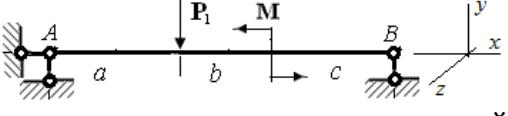
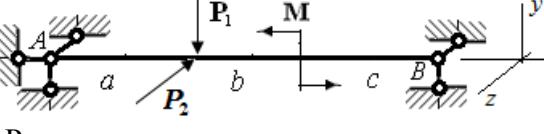
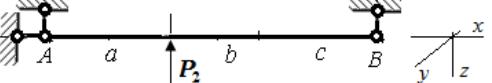
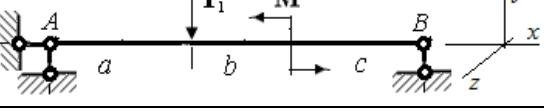
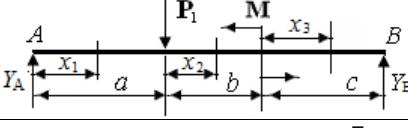
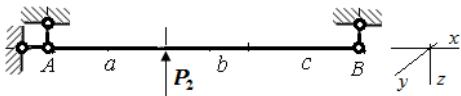
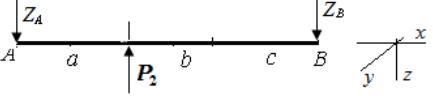
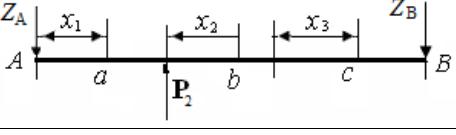
<p>Исходные данные: $a = b = c = 1 \text{ м}$, $P_1 = 70 \text{ кН}$, $P_2 = 60 \text{ кН}$, $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$</p>	 <p>схема нагружения стержня в главной плоскости $y-x$</p>
 <p>Расчетная схема нагружения стержня в главных плоскостях $y-x$ и $z-x$</p>	 <p>схема нагружения стержня в главной плоскости $z-x$</p>
	$\sum M_A(P_i) = 0, \quad -P_1 a + M + Y_B(a+b+c) = 0, \quad Y_B = \frac{P_1 a - M}{a+b+c} = \frac{70 \cdot 1 - 10}{3} = 20 \text{ кН},$ $\sum M_B(P_i) = 0, \quad -Y_A(a+b+c) + P_1(b+c) + M = 0, \quad Y_A = \frac{P_1(b+c) + M}{a+b+c} = 50 \text{ кН}$
	
$0 \leq x_1 \leq a, \quad Q_{y_1} = (\sum P_{iy})_f = Y_A = 50 \text{ кН}, \quad M_{z_1} = -[\sum M_z(P_i)]_f = Y_A x_1 = 50x_1,$ $0 \leq x_2 \leq b, \quad Q_{y_2} = (\sum P_{iy})_f = Y_A - P_1 = -20 \text{ кН}, \quad M_{z_2} = Y_A(a+x_2) - P_1 x_2,$ $0 \leq x_3 \leq c, \quad Q_{y_3} = -(\sum P_{iy})_p = -Y_B = -20 \text{ кН}, \quad M_{z_3} = [\sum M_z(P_i)]_p = Y_B(c-x_3)$	
	
$\sum M_A(P_i) = 0, \quad P_2 a - Z_B(a+b+c) = 0, \quad Z_B = P_2 \frac{a}{a+b+c} = 60 \cdot \frac{1}{3} = 20 \text{ кН};$ $\sum M_B(P_i) = 0, \quad Z_A(a+b+c) - P_2(a+b) = 0, \quad Z_A = P_2 \frac{a+b}{a+b+c} = 60 \cdot \frac{2}{3} = 40 \text{ кН}$	
	
$0 \leq x_1 \leq a, \quad Q_{z_1} = -(\sum P_{iz})_f = -Z_A = -40 \text{ кН}, \quad M_{y_1} = -[\sum M_y(P_i)]_f = -Z_A x_1 = -40x_1,$ $0 \leq x_2 \leq b, \quad Q_{z_2} = (\sum P_{iz})_p = Z_B = 20 \text{ кН}, \quad M_{y_2} = [\sum M_y(P_i)]_p = -Z_B(c+b-x_2),$ $0 \leq x_3 \leq c, \quad Q_{z_3} = (\sum P_{iz})_p = Z_B = 20 \text{ кН}, \quad M_{y_3} = [\sum M_y(P_i)]_p = -Z_B(c-x_2)$	

Рис. 2.8. Последовательность расчета стержня при косом изгибе поперечных сил Q_y, Q_z и изгибающих моментов M_z, M_y в поперечных сечениях

$$M_{y_3} \Big|_{x_3=c} = 0 \quad M_{y_1} \Big|_{x_1=a} = -40 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad M_{y_3} \Big|_{x_3=0} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad M_{y_2} \Big|_{x_2=b} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

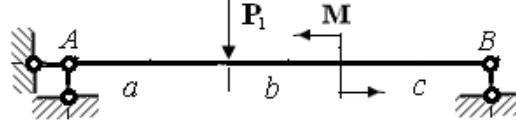
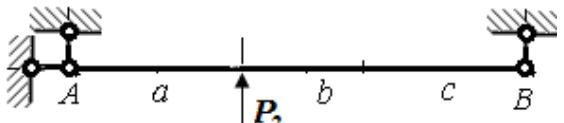
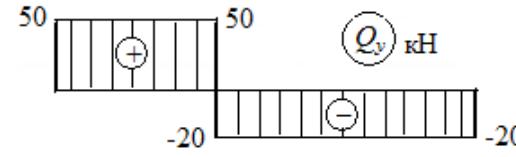
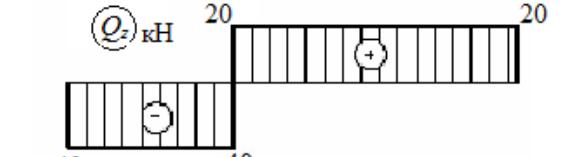
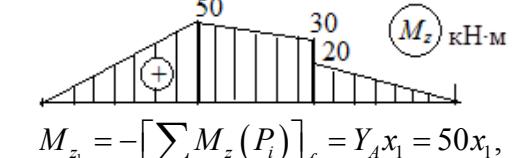
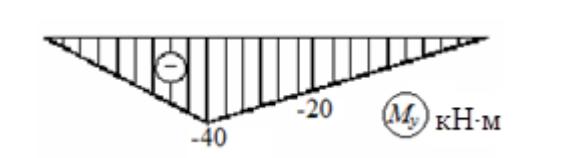
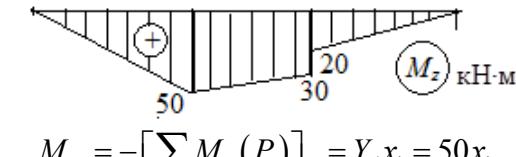
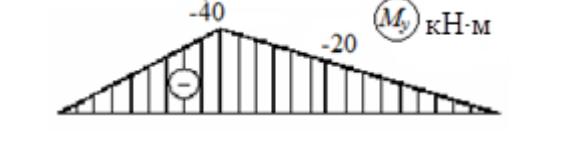
	
 $Q_{y_1} = \left(\sum P_{iy} \right)_f = Y_A = 50 \text{ kH}, \quad 0 \leq x_1 \leq a,$ $Q_{y_2} = Y_A - P_1 = -20 \text{ kH}, \quad 0 \leq x_2 \leq b,$ $Q_{y_3} = -Y_B = -20 \text{ kH}, \quad 0 \leq x_3 \leq c$	 $Q_{z_1} = -Z_A = -40 \text{ kH}, \quad 0 \leq x_1 \leq a,$ $Q_{z_2} = Z_B = 20 \text{ kH}, \quad 0 \leq x_2 \leq b,$ $Q_{z_3} = Z_B = 20 \text{ kH}, \quad 0 \leq x_3 \leq c$
 $M_{z_1} = - \left[\sum M_z (P_i) \right]_f = Y_A x_1 = 50 x_1,$ $M_{z_1} \Big _{x_1=0} = 0, \quad M_{z_1} \Big _{x_1=a} = 50 \text{ kH}\cdot\text{m},$ $M_{z_2} \Big _{x_2=0} = 50 \text{ kH}\cdot\text{m}, \quad M_{z_2} \Big _{x_2=b} = 30 \text{ kH}\cdot\text{m},$ $M_{z_3} \Big _{x_3=0} = 20 \text{ kH}\cdot\text{m}, \quad M_{z_3} \Big _{x_3=c} = 0.$	 $M_{y_1} \Big _{x_1=0} = 0, \quad M_{y_1} \Big _{x_1=a} = -40 \text{ kH}\cdot\text{m},$ $M_{y_2} \Big _{x_2=0} = -40 \text{ kH}\cdot\text{m}, \quad M_{y_2} \Big _{x_2=b} = -20 \text{ kH}\cdot\text{m},$ $M_{y_3} \Big _{x_3=0} = -20 \text{ kH}\cdot\text{m}, \quad M_{y_3} \Big _{x_3=c} = 0.$
 $M_{z_1} = - \left[\sum M_z (P_i) \right]_f = Y_A x_1 = 50 x_1,$ $M_{z_1} \Big _{x_1=0} = 0, \quad M_{z_1} \Big _{x_1=a} = 50 \text{ kH}\cdot\text{m},$ $M_{z_2} \Big _{x_2=0} = 50 \text{ kH}\cdot\text{m}, \quad M_{z_2} \Big _{x_2=b} = 30 \text{ kH}\cdot\text{m},$ $M_{z_3} \Big _{x_3=0} = 20 \text{ kH}\cdot\text{m}, \quad M_{z_3} \Big _{x_3=c} = 0.$	 $M_{y_1} \Big _{x_1=0} = 0, \quad M_{y_1} \Big _{x_1=a} = -40 \text{ kH}\cdot\text{m},$ $M_{y_2} \Big _{x_2=0} = -40 \text{ kH}\cdot\text{m}, \quad M_{y_2} \Big _{x_2=b} = -20 \text{ kH}\cdot\text{m},$ $M_{y_3} \Big _{x_3=0} = -20 \text{ kH}\cdot\text{m}, \quad M_{y_3} \Big _{x_3=c} = 0.$

Рис. 2.9. Определение числовых значений и построение эпюров поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях стержня при косом изгибе

Определив внутренние силовые факторы в поперечных сечениях стержня, переходим к определению напряжений в различных точках поперечного сечения и нахождению опасных точек в этом сечении.

Определение положения опасного сечения стержня

Опасным является то поперечное сечение стержня, где значение приведенного момента по модулю $|M_{\text{пп}}|$ достигает наибольшего значения. Для прямоугольного поперечного сечения

$$|M_{\text{пп}}| = |M_z| + |M_y| \frac{W_z}{W_y}.$$

Анализируя эпюры изгибающих моментов M_y и M_z (рис. 2.9), визуально легко установить, что опасным сечением стержня является сечение $x_1 = a$, где изгибающий момент $|M_z| = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$, изгибающий момент $|M_y| = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Модуль приведенного изгибающего момента

$$|M_{\text{np}}| = 50 + 40 \frac{W_z}{W_y}.$$

Учитывая, что для прямоугольного поперечного сечения $\frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b}$ а по условию задания $\frac{h}{b} = 2$, имеем $|M_{\text{np}}| = 50 + 40 \cdot 2 = 130 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Определение положения нулевой линии и опасных точек в опасном сечении

Положение нулевой линии определяется углом β , величина которого равна

$$\beta = \arctg \frac{M_z}{M_y} \frac{J_y}{J_z}.$$

Для прямоугольного поперечного сечения стержня

$$J_z = \frac{1}{12}bh^3, \quad J_y = \frac{1}{12}hb^3, \quad \frac{J_y}{J_z} = \frac{b^2}{h^2} = \left(\frac{b}{h}\right)^2.$$

Для рассматриваемой задачи $b/h = 0,5$. Следовательно,

$$\frac{J_y}{J_z} = \left(\frac{b}{h}\right)^2 = 0,25, \quad \beta = \arctg \frac{M_z}{M_y} \frac{J_y}{J_z} = \arctg \left(\frac{50}{-40} \cdot 0,25 \right) = -17,35^0.$$

Так как угол $\beta < 0$, то он должен быть отложен от оси y (рис. 2.10, а) по часовой стрелке, и нулевая линия ориентирована под углом β к оси y , проходя через центр тяжести поперечного сечения.

Если провести нулевую линию в поперечном сечении стержня (рис. 2.10, б), то легко визуально установить, что опасными точками в сечении являются точки, наиболее удаленные от нулевой линии. Этими точками являются точка A_1 и точка A_2 .

Нулевая линия делит поперечное сечение на две зоны: зону растяжения (на рисунке 2.10 эта зона обозначена знаками «+») и зону сжатия (на рисунке 2.10 эта зона обозначена знаками «-»).

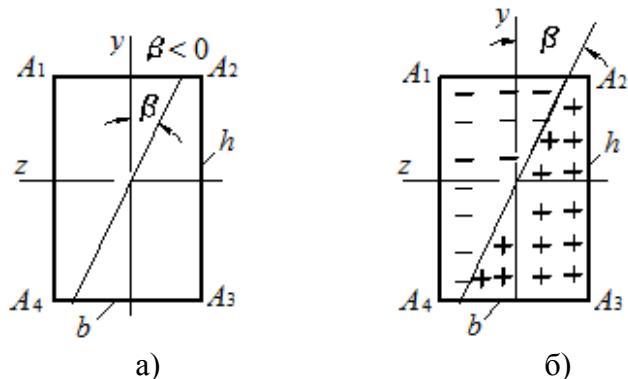


Рис. 2.10. Нулевая линия в поперечном сечении

Определение размеров поперечного сечения стержня, обеспечивающих выполнение условия прочности

Условие прочности при косом изгибе сформулировано следующим образом: величина нормальных напряжений в опасных точках опасного сечения по модулю не должна превышать допускаемых

$$|\sigma_{A_i}| \leq [\sigma], \quad |\sigma_{A_i}| = \frac{|M_{\text{np}}|}{W_z},$$

где $|\sigma_{A_i}|$ – модуль нормальных напряжений в опасных точках поперечного сечения.

Имея неравенство $\frac{|M_{\text{пп}}|}{W_z} \leq [\sigma]$, находим, что осевой момент сопротивления поперечного сечения стержня $W_z \geq \frac{[\sigma]}{|M_{\text{пп}}|}$.

Так как $W_z = \frac{bh^2}{6}$, то при заданном отношении $\frac{b}{h} = \mu$ имеем $W_z = \frac{\mu h^3}{6}$. Тогда

неравенство $W_z \geq \frac{[\sigma]}{|M_{\text{пп}}|}$ можно преобразовать к виду $\frac{\mu h^3}{6} \geq \frac{|M_{\text{пп}}|}{[\sigma]}$, откуда имеем

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot |M_{\text{пп}}|}{\mu \cdot [\sigma]}}, \quad \mu = 0,5, \quad h \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 130 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 100 \cdot 10^6}} = \frac{2,49}{10} = 0,249 \text{ м.}$$

Округлим значение h до величины 0,25 м. Значение b определим из заданного отношения сторон $\frac{b}{h} = \mu = 0,5$; $b = 0,5h = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125$ м.

Определение нормальных напряжений в характерных точках профиля опасного поперечного сечения и построение эпюр напряжений для точек профиля поперечного сечения

В качестве характерных точек профиля прямоугольного поперечного сечения выделим точки A_1, A_2, A_3, A_4 (рис. 2.10, а). Нормальные напряжения в этих точках поперечного сечения могут быть определены как

$$\sigma_{A_i} = \frac{1}{W_z} \left(-M_z \frac{y_{A_i}}{y_{\max}} + M_y \frac{W_z}{W_y} \frac{z_{A_i}}{z_{\max}} \right), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Момент сопротивления сечения $W_z = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{0,125 \cdot 0,25^2}{6} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

Отношение $\frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b} = 2$. Учитывая, что

$$z_{\max} = \frac{b}{2}, \quad y_{A_1} = \frac{h}{2}, \quad z_{A_1} = \frac{b}{2}, \quad y_{A_2} = \frac{h}{2}, \quad z_{A_2} = -\frac{b}{2},$$

$$y_{A_3} = -\frac{h}{2}, \quad z_{A_3} = -\frac{b}{2}, \quad y_{A_4} = -\frac{h}{2}, \quad z_{A_4} = \frac{b}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{имеем} \quad \frac{y_{A_1}}{y_{\max}} &= 1, & \frac{y_{A_2}}{y_{\max}} &= 1, & \frac{y_{A_3}}{y_{\max}} &= -1, & \frac{y_{A_4}}{y_{\max}} &= -1, \\ \frac{z_{A_1}}{z_{\max}} &= 1, & \frac{z_{A_2}}{z_{\max}} &= -1, & \frac{z_{A_3}}{z_{\max}} &= -1, & \frac{z_{A_4}}{z_{\max}} &= 1, \end{aligned}$$

Тогда нормальные напряжения в точках A_1, A_2, A_3, A_4 будут равны

$$\sigma_{A_1} = \frac{1}{W_z} \left[-50 \cdot 10^3 \cdot 1 + (-40) \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 1 \right] = \frac{-130 \cdot 10^3}{1,3 \cdot 10^{-3}} = -100 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\sigma_{A_2} = \frac{1}{W_z} \left[-50 \cdot 10^3 \cdot 1 + (-40) \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot (-1) \right] = \frac{30 \cdot 10^3}{1,3 \cdot 10^{-3}} = 23 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\sigma_{A_3} = \frac{1}{W_z} \left[-50 \cdot 10^3 \cdot (-1) + (-40) \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot (-1) \right] = \frac{130 \cdot 10^3}{1,3 \cdot 10^{-3}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\sigma_{A_4} = \frac{1}{W_z} \left[-50 \cdot 10^3 \cdot (-1) + (-40) \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 1 \right] = \frac{-30 \cdot 10^3}{1,3 \cdot 10^{-3}} = -23 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Построим эпюры нормальных напряжений для точек поперечного сечения, равноудаленных от нулевой линии (рис. 2.11, а).

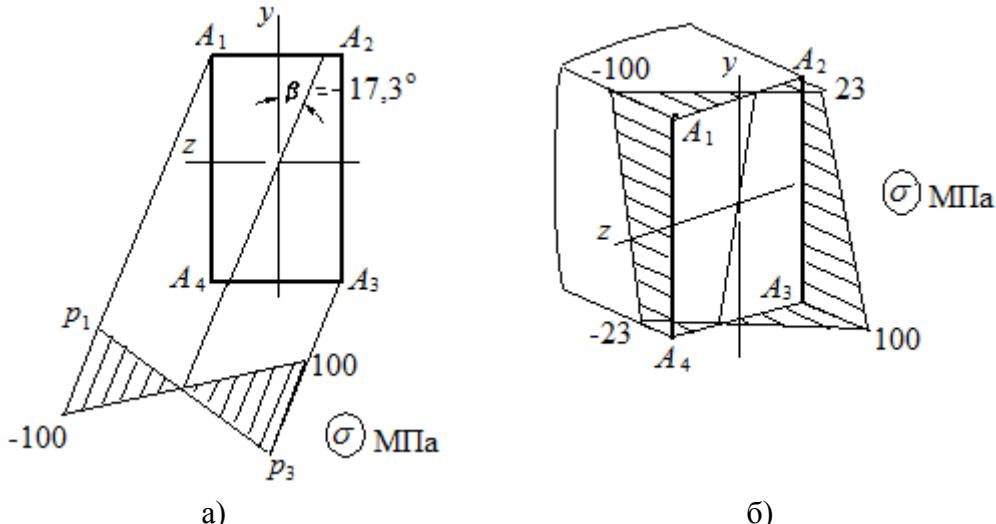


Рис. 2.11. Эпюры нормальных напряжений: а) для точек поперечного сечения, равноудаленных от нулевой линии; б) для точек профиля поперечного сечения

Для этого за пределы профиля поперечного сечения проведем линию, перпендикулярную нулевой линии. Спроектируем на эту линию точки A_1 и A_3 (опасные точки поперечного сечения). Проекцией точки A_1 будет точка p_1 , а проекцией точки A_3 будет точка p_3 .

Из точки p_1 отложим ординату, соответствующую нормальному напряжению в точке A_1 ($\sigma_{A_1} = -100$ МПа). Из точки p_3 отложим ординату, соответствующую нормальному напряжению в точке A_3 ($\sigma_{A_3} = 100$ МПа). Так как напряжения в точках A_1 и A_3 противоположны по знаку, то и ординаты при построении эпюры должны быть отложены по разные стороны от линии $p_1 - p_3$. Соединив концы ординат линией и проведя соответствующие ординаты для других точек (рис. 2.11, а), получим эпюру нормальных напряжений в точках поперечного сечения, равноудаленных от нулевой линии.

Построим эпюры нормальных напряжений для точек профиля поперечного сечения. Для построения эпюры напряжений в аксонометрии поперечное сечение целесообразно расположить таким образом (рис. 2.11, б), чтобы зона сжимающих напряжений была расположена со стороны наблюдателя. Отложим в точке A_1 отрезок, соответствующий напряжению $\sigma_{A_1} = -100$ МПа и параллельный оси x . Так как напряжение в этой точке сжимающее, отрезок откладываем в тело стержня.

Далее отложим в точке A_2 отрезок, соответствующий напряжению $\sigma_{A_2} = 23$ МПа и параллельный продольной оси стержня. Так как напряжения в этой точке растягивающие, отрезок откладываем от поперечного сечения (рис. 2.11, б). В точке A_3

отложим отрезок, соответствующий напряжению $\sigma_{A_3} = 100$ МПа, а в точке A_4 – отрезок, соответствующий напряжению $\sigma_{A_4} = -23$ МПа (рис. 2.11, б).

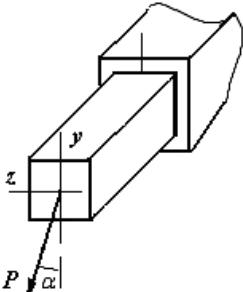
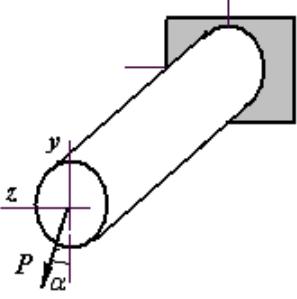
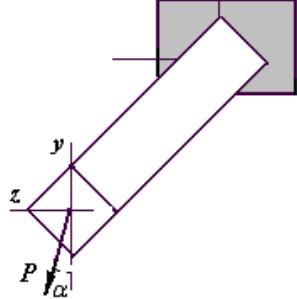
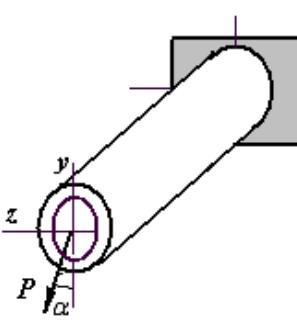
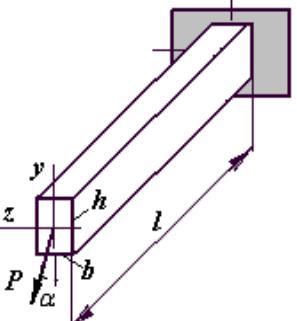
Соединив концы отрезков σ_{A_1} и σ_{A_2} (рис. 2.11, б), получим эпюру нормальных напряжений точек профиля прямоугольного сечения, лежащих на стороне $A_1 A_2$. Соединив концы отрезков σ_{A_2} и σ_{A_3} , получим эпюру напряжений точек профиля прямоугольного сечения, лежащих на стороне $A_2 A_3$. Соединив концы отрезков σ_{A_3} и σ_{A_4} , получим эпюру напряжений точек профиля прямоугольного сечения, лежащих на стороне $A_3 A_4$. Соединив концы отрезков σ_{A_4} и σ_{A_1} , получим эпюру напряжений точек профиля прямоугольного сечения, лежащих на стороне $A_4 A_1$.

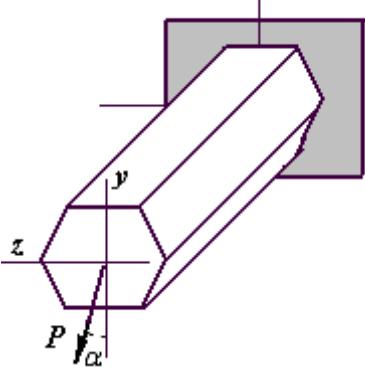
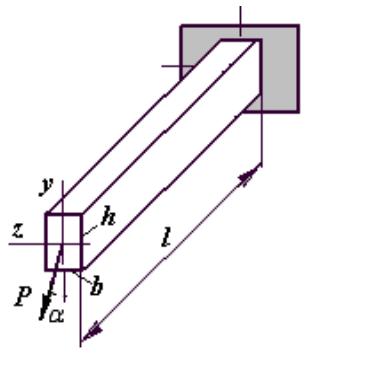
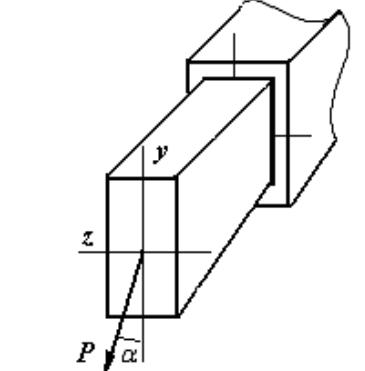
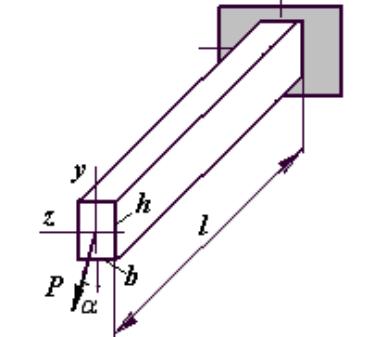
В точках пересечения эпюры со сторонами прямоугольника величина нормальных напряжений равна нулю. Соединив эти точки, получим нулевую линию в поперечном сечении стержня (рис. 2.11, б). Эта линия делит поперечное сечение на две зоны: зону сжатия и зону растяжения.

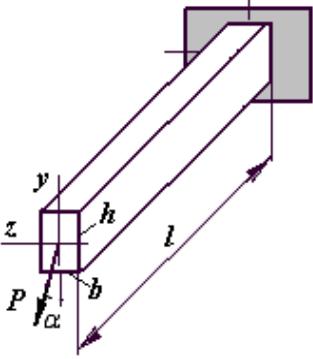
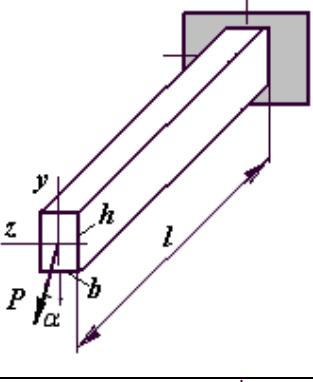
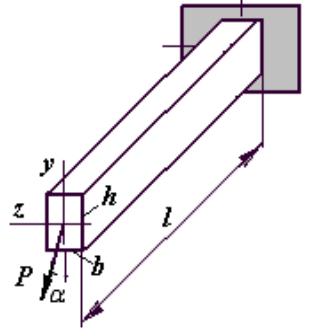
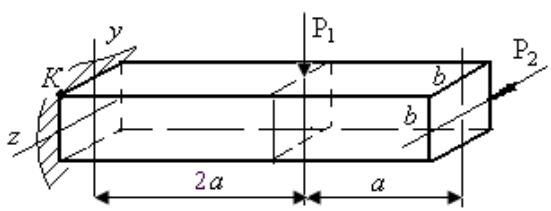
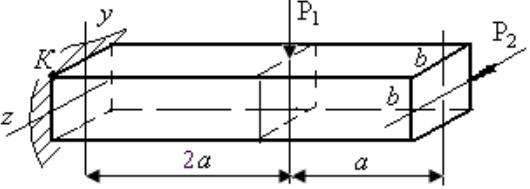
3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ по теме «Расчет стержня при косом изгибе»

1. Какой изгиб называется косым?
2. Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать косой изгиб?
3. Что называется чистым косым изгибом и поперечным косым изгибом?
4. Сочетанием каких видов изгиба является косой изгиб?
5. По каким формулам определяются нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса при косом изгибе? Как устанавливаются знаки этих напряжений? *Выведите соответствующие формулы.*
6. Как определяются касательные напряжения в поперечных сечениях балки при косом изгибе?
7. Как находится положение нейтральной оси при косом изгибе? *Выведите соответствующую формулу.*
8. Что представляют собой опасные точки в сечении и как определяется их положение при косом изгибе?
9. Как определяются перемещения точек оси балки при косом изгибе?

4. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ по теме «Косой изгиб стержня»

	<p>Балка квадратного сечения, нагруженная поперечной силой P в плоскости торцевого сечения, испытывает...</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) изгиб с кручением, 2) поперечный изгиб, 3) косой изгиб, 4) чистый изгиб
	<p>Балка круглого сечения, нагруженная поперечной силой P в плоскости торцевого сечения, испытывает...</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) изгиб с кручением, 2) поперечный изгиб, 3) косой изгиб, 4) чистый изгиб
	<p>Балка квадратного сечения, нагруженная поперечной силой P в плоскости торцевого сечения, испытывает...</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) изгиб с кручением, 2) поперечный изгиб, 3) косой изгиб, 4) чистый изгиб
	<p>Балка круглого кольцевого сечения, нагруженная поперечной силой P в плоскости торцевого сечения, испытывает...</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) изгиб с кручением, 2) поперечный изгиб, 3) косой изгиб, 4) чистый изгиб
	<p>Косой изгиб – это такой вид нагружения стержня, при котором плоскость действия полного изгибающего момента не совпадает...</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) только с главной плоскостью $y-x$, 2) только с главной плоскостью $z-x$, 3) ни с одной из главных плоскостей

	<p>Балка шестиугольного сечения, нагруженная поперечной силой P в плоскости торцевого сечения, испытывает...</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) изгиб с кручением, 2) поперечный изгиб, 3) косой изгиб, 4) чистый изгиб
	<p>При косом изгибе в поперечных сечениях стержня возникают...</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) продольная сила N, поперечные силы Q_y, Q_z; 2) продольная сила N, поперечные силы Q_y, Q_z и крутящий момент M_x; 3) поперечные силы Q_y, Q_z, изгибающие моменты M_y, M_z; 4) продольная сила N, изгибающие моменты M_y, M_z; 5) поперечные силы Q_y, Q_z и крутящий момент M_x
	<p>Балка прямоугольного сечения, нагруженная силой P в торцовом сечении, испытывает...</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) изгиб с кручением, 2) поперечный изгиб, 3) косой изгиб, 4) прямой изгиб, 5) чистый изгиб
	<p>Балка прямоугольного сечения нагружена силой P в торцовом сечении. Поперечная сила Q_y в поперечных сечениях консольной балки равна...</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $P \sin \alpha$ 2) $P \cos \alpha$ 3) $P \operatorname{tg} \alpha$ 4) P

	<p>Балка прямоугольного сечения нагружена силой P в торцовом сечении. Поперечная сила Q_z в поперечных сечениях консольной балки равна...</p> <p>1) $P \sin \alpha$ 2) $P \cos \alpha$ 3) $P \operatorname{tg} \alpha$ 4) P</p>
	<p>Балка прямоугольного сечения нагружена силой P в торцовом сечении. Изгибающий момент M_z в поперечном сечении консольной балки у опоры по абсолютной величине равен...</p> <p>1) $Pl \sin \alpha$ 2) $Pl \cos \alpha$ 3) $Pl \operatorname{tg} \alpha$ 4) Pl</p>
	<p>Балка прямоугольного сечения нагружена силой P в торцовом сечении. Изгибающий момент M_y в поперечном сечении консольной балки у опоры по абсолютной величине равен...</p> <p>1) $Pl \sin \alpha$ 2) $Pl \cos \alpha$ 3) $Pl \operatorname{tg} \alpha$ 4) Pl</p>
	<p>Балка прямоугольного сечения нагружена силами P_1 и P_2. Изгибающий момент M_y в поперечном сечении консольной балки у опоры по абсолютной величине равен...</p> <p>1) $2P_1a$ 2) $3P_2a$ 3) $2P_1a - P_2a$ 4) P_2a</p>
	<p>Балка прямоугольного сечения нагружена силами P_1 и P_2. Изгибающий момент M_z в поперечном сечении консольной балки у опоры по абсолютной величине равен...</p> <p>1) $2P_1a$ 2) $3P_2a$ 3) $2P_1a - P_2a$ 4) P_2a</p>

5. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

по теме «Расчет стержня при косом изгибе»

5.1. Техническое задание

Стальной стержень (модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа) прямоугольного поперечного сечения нагружен сосредоточенными силами P_1 и P_2 , а также моментами пар сил M . Плоскости нагружения совпадают с главными плоскостями стержня. Схемы нагружения стержня представлены на рисунках 5.1 и 5.2.

Исходные данные, определяющие силы P_1 и P_2 , а также моменты пар сил M , длины участков a , b и c представлены в таблице 5.1.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Таблица 5.1

Параметры	Номер строки			
	1	2	3	4
Сила P_1 , кН	30	20	20	15
Сила P_2 , кН	20	25	20	10
Момент пары сил M , кН·м	40	30	20	23
Длина участка a , м	1,0	1,2	1,2	1,4
Длина участка b , м	1,5	1,4	1,8	1,6
Длина участка c , м	1,0	1,2	1,0	1,0

Требуется:

- Представить схемы нагружения стержня в плоскости y - x и z - x (оси y , z – главные центральные оси поперечных сечений).
- Определить реакции опор при нагружении в плоскости y - x и z - x .
- Определить поперечные силы Q_y и Q_z и изгибающие моменты M_z и M_y в поперечных сечениях стержня, построить эпюры изгибающих моментов.
- Определить положение опасного сечения.
- Из условия прочности при допускаемом напряжении $[\sigma] = 160$ МПа подобрать размеры поперечного сечения стержня при заданном соотношении сторон $\frac{h}{b} = 2$, где h и b – соответственно высота и ширина прямоугольного сечения.
- Определить положение нулевой линии в опасном сечении стержня, найти опасные точки, определить для этого сечения зону сжатия и зону растяжения.

5.2. Схемы расчетных заданий на тему «Расчет стержня при косом изгибе»

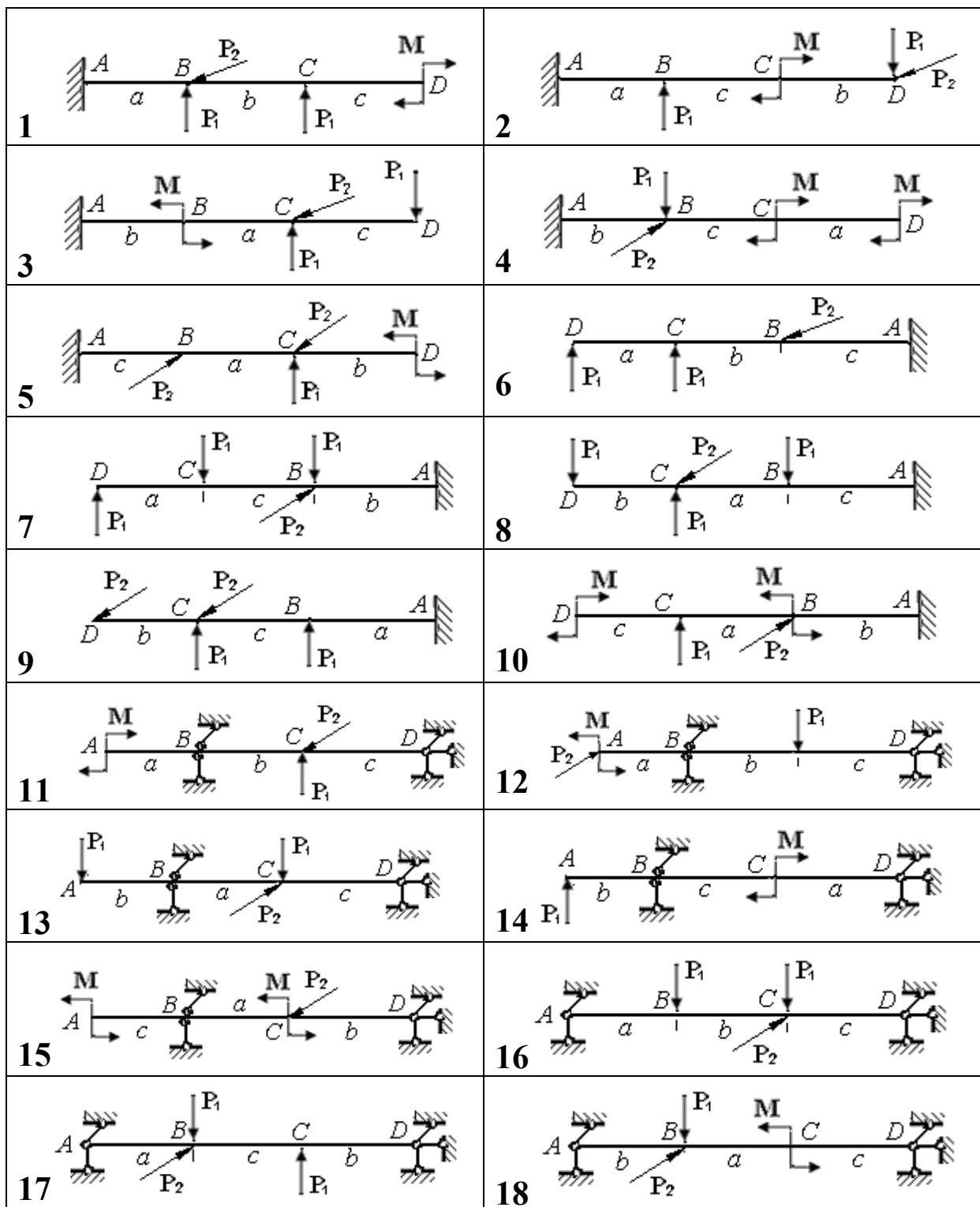


Рис. 5.1. Схемы нагружения стержня при косом изгибе

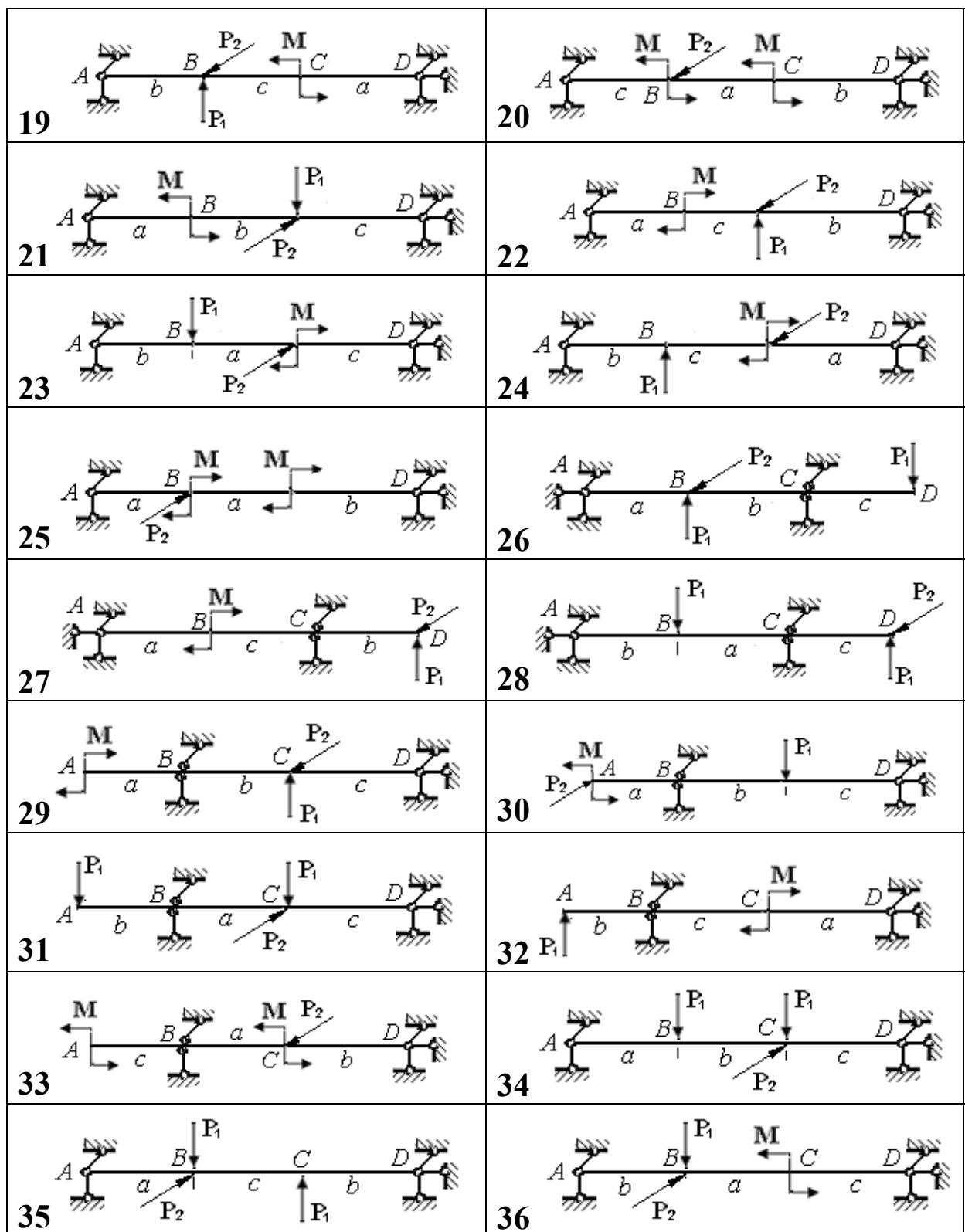


Рис. 5.2. Схемы нагружения стержня при косом изгибе

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены основные положения расчета стержня при косом изгибе. Последовательность расчета связана с выполнением следующих этапов.

Если силовые плоскости внешних сил при нагружении стержня не совпадают с главными плоскостями стержня, то эти силы нужно разложить на составляющие, лежащие в главных плоскостях.

Далее рассматривается нагружение стержня отдельно сначала в одной плоскости нагружения (например, в плоскости $y - x$), совпадающей с главной плоскостью стержня. Последовательность расчета соответствует той, что имеет место при поперечном изгибе:

- отбрасываются внешние связи и их действие заменяется реакциями связей, которые являются неизвестными величинами;
- составляются уравнения равновесия, из которых могут быть определены неизвестные реакции связей;
- составляются уравнения для определения внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня на различных его участках.

После того как определены внутренние силовые факторы в поперечных сечениях на каждом участке стержня в плоскости $y - x$, переходим к определению внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня, нагруженного внешними силами уже в другой плоскости, совпадающей с главной плоскостью $z - x$ стержня. Последовательность расчета соответствует изложенной выше.

Нормальные напряжения σ в произвольной точке поперечного сечения от действия изгибающих моментов M_z и M_y определяются как

$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z}y + \frac{M_y}{J_y}z,$$

где J_z – момент инерции поперечного сечения относительно оси z ; y – координата точки по оси y ; где J_y – момент инерции поперечного сечения относительно оси z ; z – координата точки по оси z .

При косом изгибе в поперечном сечении существуют такие точки (обозначим координаты этих точек y_0 и z_0), для которых $\sigma = 0$. Геометрическое место этих точек образует нулевую линию, уравнение которой имеет вид

$$z_0 = \frac{M_z}{M_y} \frac{J_y}{J_z} y_0.$$

Опасными будут те точки поперечного сечения, которые наиболее удалены от нулевой линии.

Нулевая линия делит поперечное сечение на две зоны: зону растяжения и зону сжатия. Если $M_y > 0$, то все точки поперечного

сечения, расположенные слева от нулевой линии, будут испытывать растяжение.

Расчет на прочность при косом изгибе связан с анализом условия прочности, которое можно сформулировать следующим образом: величина нормальных напряжений в опасных точках опасного сечения по модулю не должна превышать допускаемых $|\sigma_{A_i}| \leq [\sigma]$.

При определении линейных и угловых перемещений поперечного сечения при косом изгибе используется принцип независимости действия сил. Вычисляются перемещения при нагружении стержня отдельно в каждой главной плоскости, а полное перемещение определяется как геометрическая сумма перемещений в главных плоскостях.

Целый раздел практикума посвящен изложению примера расчета стержня на прочность при косом изгибе, включающего техническое задание и описание последовательности расчета для решения поставленных задач.

Практикум содержит контрольные вопросы и тестовые задания по теме, которые могут быть использованы для самостоятельного контроля степени освоения материала, контроля знаний на практических занятиях, а также при аттестации студентов.

Представлены варианты расчетно-проектировочных заданий на тему «Косой изгиб стержня» и таблицы исходных данных к заданиям, которые могут быть использованы при выполнении контрольных работ, расчетных заданий, при проведении практических занятий и самостоятельной работе студентов.

ГЛОССАРИЙ

Балка – стержень, работающий на изгиб.

Внешними связями являются материальные тела, ограничивающие перемещения тех или иных точек рассматриваемой системы, но не входящие в эту систему (например, опоры балки).

Внешние силы – реакции внешних связей.

Внутренними связями являются ограничения, которые не позволяют элементам системы произвольно смещаться друг относительно друга.

Внутренние силы – реакции внутренних связей.

Внутренние силовые факторы – составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил в поперечном сечении стержня (продольная сила, поперечные силы, крутящий момент, изгибающие моменты)

Главными осями инерции сечения называются оси, относительно которых моменты инерции сечения достигают максимума или минимума.

Главными моментами инерции сечения называются моменты инерции сечения относительно главных осей.

Главными центральными осями инерции сечения называются главные оси, проходящие через центр тяжести сечения.

Деформация – изменение формы и размеров тела при его нагружении.

Деформация упругая – деформация, которая исчезает после удаления нагрузки, действующей на тело.

Допускаемые напряжения – устанавливаемые для материала предельные напряжения, чтобы наибольшие напряжения, полученные в результате расчета конструкции (расчетные напряжения), не превышали их значения. Значение допускаемого напряжения устанавливается путем деления предела прочности на величину, большую единицы, называемую **коэффициентом запаса**.

Жесткость – способность конструктивного элемента воспринимать воздействие без существенного изменения геометрических размеров.

Изгиб – такой вид нагружения стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты.

Изгибающий момент – момент элементарных внутренних сил, действующих по элементарным площадкам сечения, относительно оси, лежащей в плоскости поперечного сечения стержня.

Изгиб прямой – изгиб, когда плоскость действия изгибающего момента в поперечном сечении проходит через одну из главных центральных осей инерции этого сечения.

Изгибная жесткость поперечного сечения стержня при изгибе – величина произведения модуля упругости E материала стержня на осевой момент инерции сечения J относительно главной центральной оси.

Изгиб косой – такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента в данном поперечном сечении стержня не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции этого сечения.

Изгиб поперечный – такой изгиб, когда в поперечных сечениях стержня наряду с изгибающим моментом действует и поперечная сила.

Изгиб с кручением стержня возникает тогда, когда внешние силы (включая и реакции внешних связей) создают на участках стержня моменты сил относительно продольной оси стержня и координатных осей, лежащих в плоскости рассматриваемого поперечного сечения.

Изотропность – равнозначность свойств тела по всем направлениям.

Касательное напряжение τ (тау) – составляющая полного напряжения, лежащая в плоскости сечения.

Коэффициент поперечной деформации (или **коэффициент Пуассона**) – величина, характеризующая модуль отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации.

Кривой стержень – стержень, ось которого представляет кривую линию.

Круглым называется стержень, у которого поперечные сечения имеют форму круга или кольца.

Метод сечений – метод определения внутренних сил, основанный на сечении тела плоскостью, отбрасывании какой-либо отсеченной части тела и заменой действия отброшенной части реакциями связей (внутренними силами).

Модуль упругости первого рода E материала – условное напряжение σ , при котором элементарный участок стержня при растяжении удлинится в два раза.

Модуль упругости второго рода G материала – условное напряжение τ , при котором изменение первоначально прямого угла между отрезками ab и ac после приложения нагрузки к телу произойдет на один радиан.

Напряжение – интенсивность внутренних сил в определенной точке данного сечения.

Нейтральный слой – слой стержня при его изгибе, в котором отсутствуют удлинения.

Нейтральной или нулевой линией поперечного сечения называется линия пересечения нейтрального слоя стержня с поперечным сечением. Точки нейтральной линии удовлетворяют условию $\sigma = 0$.

Нормальное напряжение σ (сигма) – составляющая полного напряжения, направленная по нормали к площадке ее действия.

Однородность материала – материал представляет собой однородную сплошную среду и свойства материала во всех точках тела совершенно одинаковы.

Опасное сечение – сечение тела, содержащее опасные точки.

Осьным моментом инерции сечения относительно некоторой заданной оси в плоскости сечения называется взятая по всей его площади сумма произведений элементарных площадок на квадраты координат этих площадок, определяющих их расстояние до соответствующей оси.

Осевым моментом сопротивления сечения относительно некоторой заданной оси в плоскости сечения называется величина, равная отношению осевого момента инерции к расстоянию от этой оси до наиболее удаленной точки сечения.

Ось стержня – геометрическое место точек, являющихся центрами тяжести поперечных сечений.

Осьсимметричными оболочками, или просто **симметричными оболочками** называются такие, срединная поверхность которых представляет собой поверхность вращения.

Относительная линейная деформация – отношение приращения длин отрезков к первоначальной длине

$$\varepsilon_x = du/dx, \quad \varepsilon_y = dv/dy, \quad \varepsilon_z = dw/dz.$$

Поперечное сечение стержня – плоская фигура, контуром которой является линия пересечения со стержнем плоскости, перпендикулярной к продольной оси стержня.

Поперечная сила – равнодействующая элементарных внутренних сил, действующих по элементарным площадкам сечения в плоскости этого сечения.

Постоянные нагрузки – нагрузки, действующие в течение всего времени существования конструкции или сооружения.

Предел пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$ – то предельное напряжение при растяжении-сжатии стержня, до которого относительные удлинения ε прямо пропорциональны напряжениям σ ; иными словами, до этого предела справедлив закон Гука.

Предел прочности – отношение наибольшей силы, которую выдерживает образец, к первоначальной площади его поперечного сечения.

Пределом прочности $\sigma_{\text{в}}$ (или **временным сопротивлением**) называется наибольшее напряжение, выдерживаемое образцом при растяжении-сжатии.

Предел текучести $\sigma_{\text{т}}$ – то предельное напряжение при растяжении-сжатии стержня, когда деформации растут без увеличения напряжений и на диаграмме растяжения получается участок, параллельный оси абсцисс. Это явление называется **текучестью** материала.

Принцип суперпозиции – результат действия группы сил не зависит от последовательности нагружения ими конструкции и равен сумме результатов от действия каждой силы в отдельности.

Продольной жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении-сжатии называется величина произведения модуля упругости первого рода материала стержня на площадь поперечного сечения EA .

Продольная ось стержня – линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений стержня.

Продольная сила – равнодействующая элементарных внутренних сил, действующих по элементарным площадкам сечения перпендикулярно плоскости этого сечения.

Прочность – способность материала или конструкции воспринимать различные воздействия (нагрузки, температурные перепады, просадки грунтов и т. д.) не разрушаясь, или не приводить к возникновению необратимых (остаточных) деформаций.

Прямой стержень – стержень, ось которого представляет прямую линию.

Силовая линия – линия пересечения плоскости действия изгибающего момента с поперечным сечением стержня.

Силовая плоскость – плоскость, проходящая через продольную ось стержня и линию действия силы.

Статическим моментом сечения относительно некоторой заданной оси в плоскости сечения называется взятая по всей его площади A сумма произведений элементарных площадок dA на координаты этих площадок, определяющих их расстояние до соответствующей оси.

Статическая нагрузка – нагрузка, не меняющаяся со временем или меняющаяся настолько медленно, что возникающие при этом ускорения и силы инерции пренебрежимо малы.

Статически определимыми называются стержневые системы, в которых внутренние усилия от заданной нагрузки можно определить с помощью уравнений равновесия (уравнений статики).

Упругость – способность материальных тел восстанавливать первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

Устойчивость – способность элементов конструкций сохранять под нагрузкой первоначальную форму равновесия. Нагрузка, превышение которой приводит к потере устойчивости состояния упругого равновесия, называется **критической нагрузкой**.

Упругая линия стержня – изогнутая продольная ось стержня при упругом деформировании.

Центробежным моментом инерции сечения относительно некоторых заданных двух взаимно перпендикулярных осей в плоскости сечения называется взятая по всей его площади сумма произведений элементарных площадок на координаты этих площадок.

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 2003. – 641 с.
2. Феодосьев, В. Н. Сопротивление материалов / В. Н. Феодосьев. – М. : Наука, 2005. – 512 с.
3. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. С. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М. : Высшая школа, 2001. – 543 с.
4. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – Киев : Наукова думка, 2006. – 732 с.
5. Манжосов, В. К. Сопротивление материалов. Основные положения и примеры решения заданий, часть 1 / В. К. Манжосов, О. Д. Новикова. – Ульяновск : УлГТУ, 2004. – 136 с.
6. Манжосов, В. К. Сопротивление материалов. Учебно-методический комплекс / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 312 с.
7. Манжосов, В. К. Сопротивление материалов. Практикум / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 264 с.
8. Манжосов, В. К. Сопротивление материалов. Определение внутренних силовых факторов : учебное пособие. – Ульяновск : УлГТУ, 2015. – 120 с.
9. Манжосов, В. К. Сопротивление материалов : краткий курс лекций. В 2 частях. Часть 1 : учебное пособие / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2017. – 220 с.
10. Манжосов, В. К. Сопротивление материалов : краткий курс лекций. В 2 частях. Часть 2 : учебное пособие / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2017. – 315 с.
11. Манжосов, В. К. Геометрические характеристики плоского сечения: методические указания / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2001. – 24 с.
12. Манжосов, В. К. Расчет стержня при поперечном изгибе: методические указания / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2016. – 36 с.
13. Манжосов, В. К. Расчет стержня при косом изгибе: методические указания / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2004. – 48 с.
14. Беликов, Г. В. Справочное пособие к расчетно-проектировочным работам по сопротивлению материалов : методические указания / Г. В. Беликов, И. Н. Карпунина. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – 68 с.

Учебное издание

МАНЖОСОВ Владимир Кузьмич, НОВИКОВА Ольга Дмитриевна
КОСОЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ

Практикум

Редактор Н. А. Евдокимова

ЭИ № 1162. Объем данных 0,6 Мб

Подписано в печать 07.11.2018. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,79. Тираж 70 экз. Заказ № 876.

Ульяновский государственный технический университет,
432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.
ИПК «Венец» УлГТУ. 432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32

Тел.: (8422) 778-113
E-mail: venec@ulstu.ru
venec.ulstu.ru